Trabajo Fin de Máster

Derivadas: una propuesta didáctica para Matemáticas I

Derivatives: a didactic proposal for Mathematics I

Autor/es

Miriam Jarauta Baigorri

Director/es

Patricia Florentín Dueñas

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2019-2020

Índice

A. Definición del objeto matemático a enseñar

1. Objeto matemático a enseñar, curso y asignatura en la que se sitúa.

Este Trabajo Fin de Máster pretende presentar una propuesta didáctica sobre las derivadas, un objeto matemático impartido en el primer curso de Bachillerato dentro de la asignatura Matemáticas I.

Conforme a la Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, en la cual se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, dicha propuesta se centrará, entre otros, en los siguientes contenidos sobre las derivadas:

- Derivada de una función en un punto.
- Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.
- Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena.
- Representación gráfica de funciones.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se pretenden enseñar a lo largo de esta unidad didáctica vienen determinados a continuación.

➢ **Campos de problemas**

- **CP1.-** Crecimiento medio de una función en un intervalo.
- **CP2.-** Interpretación física, geométrica y algebraica de la derivada en un punto.
    - **CP2.1**- Obtención de la velocidad instantánea de un móvil.
    - **CP2.2.-** Obtención de la derivada en un punto.
    - **CP2.3-** Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.
- **CP3.-** Obtención de la derivada a partir de la expresión analítica.
    - **CP3.1-** Obtención de la función derivada.
    - **CP3.2-** Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos.
- **CP4.-** Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

- **CP5.-** Optimización de funciones.
- **CP6.-** Representación gráfica de funciones.
  - **CP6.1-** Representación gráfica de una función dadas sus características.
  - **CP6.2-** Estudio de las características de una función y representación gráfica de la misma.
  - **CP6.3-** Relacionar una característica (dominio, monotonía, extremos relativos…) con la función que la posee.

➢ **<u>Técnicas</u>**

- **T1.-** Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo.
- **T2.-** Calcular el límite de la T.V.M cuando $h \to 0$.
- **T3.-** Calcular la derivada de una función en un punto.
- **T4.-** Hallar la primera derivada de una función.
- **T5.-** Calcular el punto donde la primera derivada toma un cierto valor.
- **T6.-** Hallar la segunda derivada de una función.
- **T7.-** Obtener los puntos críticos de una función, es decir, hallar los puntos que cumplen la ecuación $f'(x) = 0$.
- **T8.-** Estudiar el signo de la primera derivada a ambos lados de los puntos críticos para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- **T9.-** Estudiar el signo de la segunda derivada en los puntos críticos para hallar los extremos relativos de una función y ver si estos son máximos o mínimos relativos.
- **T10.-** Expresar analíticamente funciones descritas mediante un enunciado.

➢ **<u>Tecnologías</u>**

- **TEC1.-** Definición de tasa de variación media (T.V.M.).
- **TEC2.-** Definición de derivada en un punto.
- **TEC3.-** Definición de función derivada.
- **TEC4.-** Reglas de derivación.
- **TEC5.-** Definición de función derivable en un punto.
- **TEC6.-** Definición de punto crítico.
- **TEC7.-** Definición de función creciente y función decreciente.
- **TEC8.-** Definición de máximo y mínimo relativo.
- **TEC9.-** Representación de funciones.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Para ver cómo se justifica la introducción de las derivadas, se van a analizar cuatro libros de texto de Matemáticas I de diferentes editoriales, para ver cómo han introducido dicho objeto matemático cada una de ellas.

En primer lugar, analizaremos el libro de Colera-Jiménez, Oliveira-González, Colera-Cañas y Santaella-Fernández (2015) de la editorial Anaya.

El tema dedicado a las derivadas ocupa el duodécimo lugar de un total de trece unidades y aparece en el bloque titulado "Análisis". Este tema se presenta después de haber trabajado los límites de funciones, la continuidad y las ramas infinitas y antes de introducir el bloque de estadística.

El tema se introduce presentando la evolución del cálculo diferencial a lo largo de la historia, así como el contexto histórico y la razón de ser del objeto matemático en cuestión: "El concepto de derivada surgió como resultado de algunos siglos de esfuerzo dirigidos a resolver dos problemas: determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y encontrar velocidades instantáneas en movimientos no uniformes." Asimismo, propone un ejercicio introductorio que consiste en el cálculo de la velocidad media e instantánea de una partícula.

La unidad comienza definiendo la tasa de variación media (T.V.M.) para calcular el crecimiento medio de una función en un intervalo y la pendiente de la recta tangente en un punto para medir el crecimiento de la función en dicho punto, la cual se denota como derivada en un punto. Además, da una interpretación geométrica de ambas definiciones. A continuación, se introduce la siguiente definición de función derivada:

Se llama **función derivada de f** (o simplemente **derivada de f**) a una función f' que asocia a cada abscisa, x, la derivada de f en ese punto, $f'(x)$, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f' o bien Df.

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En las siguientes cuatro hojas aparecen las reglas de derivación, entre las que destaca la regla de la cadena. Las últimas siete hojas del tema las dedica a explicar las aplicaciones de las derivadas, introducir la regla de L'Hopital e indicar los pasos que hay que seguir para representar funciones polinómicas y racionales.

Destacar que esta editorial tiene una sección titulada "Ejercicios y problemas resueltos", en la que como su propio nombre indica, resuelve distintos tipos de ejercicios y problemas en los que se requiere la derivada. Y hay otra sección llamada "Ejercicios y problemas guiados", en la cual se pide resolver unos ejercicios mediante las instrucciones dadas.

En segundo lugar, analizaremos el libro De la Prida-Almansa et al. (2015) de la editorial Santillana.

En este libro los temas dedicados a las derivadas ocupan el décimo y undécimo lugar de un total de catorce. Se presentan después de haber trabajado los límites de las funciones y la continuidad y antes de introducir las integrales.

La introducción del tema la ocupa una de las aplicaciones de las derivadas, la optimización de las funciones.

Al igual que en el primer libro analizado, la unidad comienza definiendo la tasa de variación media y la derivada de una función en un punto y dedica una hoja entera a la interpretación geométrica de la derivada. La definición de función derivada que presenta es la siguiente:

La **función derivada** de una función $f(x)$ es una función, $f'(x)$, que asocia a cada punto x, la derivada de $f(x)$ en ese punto.

$$f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En las siguientes seis hojas se introducen las reglas de derivación junto a diferentes ejemplos en los que se aplican dichas reglas.

Al igual que en el libro de la editorial Anaya, este libro cuenta con una sección llamada “Saber hacer” en la que aparecen resueltos diferentes tipos de ejercicios cuyas resoluciones se llevan a cabo a partir de las nociones de derivada presentadas en el tema.

A diferencia de Anaya, Santillana dedica un tema entero para trabajar las aplicaciones de las derivadas y la representación de funciones polinómicas y racionales.

En tercer lugar, analizaremos el libro de González-García, Llorente-Medrano y Ruiz-Jiménez (2008) de la editorial Editex.

En este libro los temas dedicados a las derivadas ocupan el duodécimo y decimotercero lugar de un total de diecisiete. Se presentan después de haber trabajado los límites y la continuidad de las funciones y antes de introducir las integrales.

El tema comienza con un índice de los contenidos que se van a adquirir durante la unidad y una pequeña contextualización histórica en la que se nombra la razón de ser del objeto “(…) cuyo origen estuvo ligado a la resolución de dos problemas: el problema del movimiento no uniforme y el de encontrar la tangente a una curva en un punto de la misma” y termina con las aplicaciones de las derivadas a la vida real. Al final de la página aparecen también unas cuestiones iniciales sobre límites, rectas tangentes, tasa de variación media…

Este libro, a diferencia de los textos analizados anteriormente, introduce el concepto de tasa de variación media e instantánea con un ejercicio resuelto sobre la velocidad media e instantánea de un móvil. Sin embargo, seguidamente, al igual que en Anaya y Santillana, define la derivada en un punto. En las siguientes tres hojas aparecen la interpretación física y geométrica de la derivada. Y, a continuación, se introduce la siguiente definición de función derivada:

La **función derivada** de una función f dada o simplemente derivada es una función que asocia a cada x, donde la función es derivable, su derivada $f'(x)$:

$$f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f'(x)$$

donde

$$f'(x) = D[f(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El conjunto $Dom\ f'$o dominio de derivabilidad de f está formado por todos los elementos de $Dom\ f$ en los que f es derivable, por tanto, $Dom\ f' \subset Dom\ f$.

En las siguientes seis hojas también aparecen las reglas de derivación, en cambio siguen un orden diferente al que seguían los libros analizados anteriormente. Primero se explican las derivadas de las operaciones con funciones, después la regla de la cadena y por último las derivadas de las funciones elementales.

En esta editorial hay que destacar que al final del tema hay una sección llamada "Nuevas tecnologías", en la que se presentan diferentes programas informáticos que pueden utilizar los alumnos para trabajar con derivadas.

Al igual que el libro de la editorial Santillana dedica un tema entero para trabajar las aplicaciones de las derivadas (monotonía, extremos relativos y problemas de optimización) y la representación de funciones polinómicas y racionales.

En cuarto lugar, analizaremos el libro de Marea Verde editorial (2019b).

En este libro, el tema dedicado a las derivadas ocupa el octavo lugar de un total de nueve unidades. Se presenta después de haber trabajado los límites y la continuidad de las funciones y antes de empezar el bloque de estadística.

Comienza introduciendo los contenidos que se impartirán a lo largo de la unidad y nombrando alguna situación de la vida real en la que se hace uso de las derivadas. Asimismo, indica que las derivadas se pueden utilizar para determinar la pendiente de la recta tangente a un punto y dibujar la gráfica de una función con mayor precisión.

Al igual que en los libros analizados anteriormente, introduce el concepto de derivada a partir de la tasa de variación media. Sin embargo, utiliza otra metodología: en primer lugar, propone una actividad de introducción en la que se pide calcular la velocidad media de un vehículo en diferentes intervalos durante un viaje a partir de la gráfica que describe ese trayecto y, entonces, a partir de ella define la Tasa de Variación y la Tasa de Variación Media como una fórmula que permite calcular la velocidad media de un móvil. Después, describe algunos ejemplos donde se calcula la pendiente de la recta secante a una función en un intervalo e institucionaliza que la T.V.M en ese intervalo coincide con la pendiente de esta recta. Seguidamente, pasa a definir la tasa de variación instantánea, pero para ello primero retrocede a la actividad de introducción utilizada para trabajar la T.V.M y calcula la velocidad media en intervalos cada vez más pequeños para ver si en un momento determinado el vehículo ha superado una cierta velocidad. Haciendo uso de esta actividad institucionaliza que el límite al que tienden las velocidades medias lo definiremos como velocidad instantánea o derivada de una función en un punto. Relacionando todo lo visto hasta entonces explica paso a paso cómo se construye la fórmula que permite calcular la derivada en un punto y tras la definición, presenta algunos ejemplos gráficos donde se visualiza la curva con su recta tangente en un punto. Después, define la derivada a la derecha y a la izquierda de un punto y determina que para que exista la derivada en ese punto deben existir las derivadas laterales y estas deben coincidir. Y, a continuación, se introduce la siguiente definición de función derivada:

Si f es derivable en X se llama **función derivada de f** a la función que asocia a cada número real de X el valor de la derivada de f en dicho punto. A esta nueva función la designamos por f', Df o $\frac{df}{dx}$.

Además, establece que si una función es derivable en un punto es continua en dicho punto.

Las siguientes diecisiete hojas las dedica a explicar las diferentes reglas de derivación, las cuales se presentan en un orden diferente a como se estudiaban en los otros libros de texto. En primer lugar presenta la derivada de la función potencial; en segundo lugar las derivadas de las funciones con operaciones (suma de funciones, constante por una función, producto de funciones y cociente de funciones); en tercer lugar explica la regla de la cadena; en cuarto lugar trabaja la derivada de la función logarítmica y el método de derivación logarítmica; en quinto lugar presenta las derivadas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas; en sexto lugar trabaja la derivada de la función inversa y establece las derivadas de las funciones inversas de las funciones trigonométricas y por último da las reglas para calcular las derivadas del argumento del seno hiperbólico, del coseno hiperbólico y de la tangente hiperbólica. Para cada una de estas funciones además de la regla que permite calcular su derivada, se da una demostración de la misma y se hacen dos ejercicios como ejemplos.

En las siguientes nueve hojas explica las diferentes aplicaciones de las derivadas. Empieza con la interpretación geométrica de la derivada (recta tangente), después menciona brevemente su interpretación física, luego pasa a explicar cómo se puede estudiar la monotonía de las funciones a partir de las derivadas y por último describe tres métodos que se pueden utilizar para analizar los extremos relativos de una función. A diferencia de los demás libros de textos este no trabaja la representación de funciones.

El tema concluye con un apartado titulado "Curiosidades" en el que se presentan algunos intereses y antecedentes de las derivadas y las aportaciones de algunos matemáticos como Newton y Leibniz al cálculo diferencial.

Una vez analizados los cuatro libros anteriores he llegado a la conclusión de que el libro de texto Marea Verde editorial (2019b) es el más completo de los cuatro a excepción de que no trabaje la representación de funciones. Además, creo que este libro es el que puede ayudar a los alumnos a comprender mejor el concepto de derivada dado que es el único que va explicando paso a paso la construcción de un nuevo concepto y enlazando cada uno de los nuevos conceptos con los anteriores, partiendo de la definición de T.V.M llega a dar la definición de función derivada. Asimismo, aporta muchas actividades resueltas que ayudan a comprender mejor los conceptos y propone una gran variedad de problemas y ejercicios para que puedan practicar.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Los libros de texto analizados en el apartado anterior presentan a lo largo del tema o los temas dedicados a las derivadas, ejercicios y problemas en los que se trabajan la mayoría de los campos de problemas, técnicas y tecnologías enumeradas en el apartado A.2 e incluso algunas de las editoriales trabajan algunos más.

Solamente los libros de texto de las editoriales Marea y Editex introducen el concepto de derivada de una función en un punto a partir de problemas contextualizados relacionados con la velocidad media e instantánea de un móvil o con otras magnitudes que varían. Por el contrario, las editoriales Santillana y Anaya únicamente presentan ejercicios sin aplicación práctica sobre el cálculo de la tasa de variación media de una función dada por su expresión analítica o su representación gráfica y en el que los alumnos solo tienen que aplicar la fórmula para su resolución.

Sin embargo, los cuatro libros analizados poseen ejercicios sobre la obtención de la derivada de una función en un punto y la obtención de la ecuación de la recta tangente y normal a una función en uno de sus puntos. Sin embargo, el único que presenta algún problema con aplicación en contextos reales sobre este último campo de problemas es el libro de Marea Verde.

Asimismo, todos los libros presentan ejercicios tipo en los que se trabaja el cálculo de la derivada de una función a partir de su expresión analítica y el estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos, ejercicios y problemas relacionados con el crecimiento y decrecimiento de una función y sus extremos relativos, los cuales son con aplicación como sin aplicación práctica, y problemas de optimización de funciones basados en la vida real.

En conclusión, todos los libros de texto analizados proponen al final del tema una serie de ejercicios y problemas mayoritariamente descontextualizados en los que los alumnos reciben la expresión analítica de una función y tienen que realizar los correspondientes cálculos.

Por otro lado, las técnicas y tecnologías trabajadas a lo largo de las unidades en lo referente a las derivadas en todos los libros de texto son las mismas que las que he nombrado en el apartado A.2 más algunas que ya han sido trabajadas en unidades anteriores como la ecuación punto-pendiente de una recta, el cálculo de límites en el infinito y en puntos determinados o la continuidad en un punto.

Por último, destacar que las editoriales de Santillana y Editex proponen ejercicios en los que se pide estudiar la concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de una función y presentan las tecnologías que justifican las técnicas que son necesarias para su resolución y que el libro de Marea Verde es el único que no trabaja ninguno de los campos de problemas sobre la representación de funciones.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumnado?

Los libros de texto fomentan el aprendizaje de las técnicas empleadas en la resolución de problemas a través de la repetición de ejercicios, es decir, a través de la memorización de dichas técnicas, lo cual les conlleva a cometer errores dado que algunos de ellos no han llegado a comprender de dónde se obtienen dichas técnicas y únicamente las usan de forma mecánica.

A continuación, se van a mostrar algunos de los errores y dificultades respecto al concepto de derivada que se observaron en un estudio exploratorio con alumnos de Bachillerato realizado por González, Muñiz y Rodríguez (2018).

- Errores a la hora de operar y simplificar expresiones algebraicas.
- Dificultad a la hora de cambiar las estrategias escogidas para la resolución de problemas si estas no son adecuadas.
- Dificultad para analizar funciones definidas por una tabla de valores o mediante su representación gráfica.
- Dificultad para resolver aspectos relacionados con la interpretación geométrica de la derivada (pendiente de una recta, interpretación de su signo, crecimiento y decrecimiento, ecuación punto-pendiente…). Especialmente, la confusión entre el valor de la función y el valor de la pendiente en un punto.
- Dificultad para determinar las funciones que componen una función compuesta.
- Errores en el cálculo de límites, confundiendo el límite de una función en un punto con el valor de la función en dicho punto.
- Errores al derivar una función potencial-exponencial mediante la regla para derivar funciones potenciales o exponenciales.
- Dificultades para asimilar las técnicas de derivación de las funciones logarítmicas, debido al desconocimiento del concepto de logaritmo y de sus propiedades.
- Errores por el desconocimiento del concepto de función y de sus propiedades.
- Errores por el desconocimiento de las reglas de derivación de las funciones elementales y de la propia regla de la cadena.
- Dificultades a la hora de trabajar con funciones trigonométricas.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Los alumnos para poder afrontar el aprendizaje de las derivadas necesitan conocer sobre todo contenidos de análisis y geometría analítica. Por un lado, en relación al bloque de análisis deben saber sobre todo nociones relacionadas con las funciones reales (es decir, funciones de variable real); su definición, sus propiedades (dominio, simetría, continuidad…), la tasa de variación media de una función en un intervalo, cómo se opera con funciones, cómo se componen las funciones, las funciones elementales junto a sus propiedades y su representación gráfica (logarítmica, exponencial…) y el concepto de límite de una función. Además de saber evaluar una función y deducir propiedades de las funciones a partir de su gráfica (monotonía, extremos relativos…). Por otro lado, en relación al bloque de geometría deben conocer los conceptos de pendiente de una recta y de recta tangente y normal a una circunferencia y saber calcular la ecuación de una recta a partir de unos datos dados (pendiente y un punto por donde pasa, dos puntos por donde pasa…). No obstante, también necesitarán recordar contenidos correspondientes al bloque de álgebra, como la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones o la simplificación y operación de fracciones algebraicas entre otros.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Muchos de los conocimientos necesarios para introducirse en el concepto de derivada se han ido enseñando a lo largo de los cuatro cursos de la Educación Secundaria Obligatoria, pero sobre todo se enseñan en los temas precedentes a la unidad dedicada a las derivadas en el primer curso de bachillerato.

Como hemos dicho en el apartado anterior, los contenidos imprescindibles para poder afrontar el aprendizaje de las derivadas están relacionados con la geometría analítica y el análisis, por lo que vienen especificados en los bloques 2, 3 y 4 que se presentan en el Anexo II de Matemáticas de la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, y en el Anexo II de Matemáticas de la Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo.

A continuación, se muestran los contenidos que se estudian en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de la ESO y en la asignatura de Matemáticas I de 1º Bachillerato de Ciencias (antes de impartir la unidad de derivadas) en dichos bloques:

4º DE LA ESO ENSEÑANZAS ACADÉMICAS:

Bloque 2: Números y Álgebra

- Logaritmos. Definición y propiedades.
- Manipulación de expresiones algebraicas. Utilización de igualdades notables.
- Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización.
- Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones.
- Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.

Bloque 3: Geometría

- Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.

Bloque 4: Funciones

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
- Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

1º DE BACHILLERATO CIENCIAS

Bloque 2: Números y álgebra

- Logaritmos decimales y neperianos.
- Planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante ecuaciones e inecuaciones. Interpretación gráfica.

Bloque 3: Análisis

- Funciones reales de variable real.
- Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz,

trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos.

- Operaciones y composición de funciones. Función inversa.
- Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones.
- Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades.

Bloque 4: Geometría

- Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.
- Cónicas. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Ecuación y elementos.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

En la primera sesión de la unidad didáctica se realizará una evaluación inicial a los alumnos a través de una prueba escrita sobre algunos de los conocimientos previos que se consideran necesarios para poder introducirse en el concepto de derivada. Dicha prueba constará de cuatro ejercicios y las respuestas dadas por los alumnos nos permitirán conocer el nivel general de la clase y planificar la unidad de las derivadas acorde a él. Por ejemplo, si la mayoría de los alumnos encuentran dificultades a la hora de realizar el ejercicio en el que se pide componer funciones, al comienzo de la sesión en la que se explique la regla de la cadena se deberá realizar un repaso de la composición de funciones.

A continuación, se presentan los ejercicios de los que consta la prueba de evaluación inicial y para los cuales los alumnos dispondrán de 25 minutos para resolverlos. Una vez transcurridos esos 25 minutos, la otra mitad de la sesión se utilizará para que varios alumnos salgan a corregir dichos ejercicios en la pizarra.

Ejercicio 1.- Dibuja la gráfica de la función $y = -3x^2 + 2x + 9$ y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿En qué intervalos la función crece? ¿En qué intervalos decrece?
b) ¿Tiene la función algún extremo relativo? ¿Dónde? ¿De qué tipo es? ¿Qué valor toma la función?
c) Justifica si la función es continua o tiene puntos de discontinuidad.

d) Calcula la T.V.M en los intervalos $\left[0,\frac{1}{3}\right] y \left[\frac{1}{3},1\right]$. Observando la gráfica de la función y el valor obtenido determina la relación existente.

Ejercicio 2.- (Editex, 2008) Calcula los siguientes límites:

a) $f(x) = 3x^2 + 5;\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

b) $g(x) = \sqrt{3x+1\,;}\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Ejercicio 3.- Siendo $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$ y $g(x) = x^2$ calcula:

a) $h(x) = fog(x)$

b) $k(x) = gof(x)$

Ejercicio 4.- Halla la ecuación de la recta que tiene pendiente $1/2$ y pasa por el punto $(-1,6)$. Halla la ecuación de la recta perpendicular a esta recta que pase por el punto $(-1,6)$.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Las razones de ser que voy a considerar para introducir las derivadas son sus diferentes aplicaciones en la vida real tanto en el campo de la física como en el de la matemática. Consideraré su aplicación para calcular la velocidad instantánea de un móvil, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos de una función y su utilización para optimizar funciones en contextos reales. Es decir, durante las sesiones aplicaremos la enseñanza para la resolución de problemas.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Las razones de ser que he tomado para introducir las derivadas coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto, ya que dicho objeto surgió para resolver problemas presentes en la vida cotidiana, y las cuales se pueden observar en el análisis histórico que aparece a continuación y que se ha extraído de Colera, Oliveira, Colera y Santaella (2015), Mondoñedo y Muñoz y Román (1999).

Pese a que el concepto de derivada surgió como instrumento para determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y encontrar velocidades instantáneas en movimientos no uniformes, el concepto ha ido evolucionando a lo largo de la historia. Además, aunque el cálculo diferencial se atribuye principalmente a Newton y Leibniz han sido muchos los matemáticos que han contribuido en su desarrollo.

Hasta el siglo XVI, la resolución de problemas en los que había que determinar la recta tangente a una curva o la velocidad instantánea de un móvil con movimiento no uniforme era particular para cada problema y se hacía mediante un método específico no generalizable a otros problemas similares.

Descartes (s. XVII)

Durante el siglo XVII las investigaciones matemáticas se centraron en estudiar las velocidades instantáneas de objetos que se movían con velocidad variable.

La geometría de Descartes introdujo la idea de coordenada y permitió representar a cada punto de la curva que describía la trayectoria del movimiento de un objeto con dos variables "x" e "y", es decir, permitió representar una curva por medio de ecuaciones. Lo cual posibilitó estudiar las propiedades de las curvas, entre ellas la velocidad instantánea, utilizando las reglas del álgebra.

Newton (s. XVII)

En 1666 introdujo las "fluxiones", conocidas actualmente como derivadas. Newton imaginaba la curva que representaba la trayectoria de un móvil como una ecuación $f(x, y) = 0$, donde x e y eran funciones del tiempo. La velocidad en cada punto estaba definida por dos componentes que son la velocidad en la dirección del eje X y la velocidad en la dirección del eje Y. Entonces, para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto calculaba el cociente y/x. Para Newton, todas las funciones eran continuas, ya que describían las trayectorias de movimientos continuos (concepto que en ese tiempo se tenía de continuidad).

Newton desarrolló métodos de derivación, como la regla de la cadena, estableció las reglas para operar con derivadas y construyó tablas para el cálculo de derivadas elementales y compuestas. Además, al abordar los problemas de máximos y mínimos, llegó a la conclusión de que la derivada es nula en un extremo y que la variable no siempre es el tiempo, sino que puede ser cualquier variable cuantitativa continua.

Leibniz (s. XVII)

Los resultados de Leibniz son prácticamente los mismos que los de Newton, aunque su punto de partida es diferente. Mientras que el trabajo de Newton se basa en las derivadas respecto al tiempo, puesto que parte de ideas físicas, el trabajo de Leibnitz se basa en sumas infinitesimales para intentar conseguir un lenguaje simbólico universal.

Sus primeros estudios son de 1966 y tratan sobre progresiones aritméticas de orden superior, en concreto, sobre cómo la suma de las diferencias está relacionada con los términos de la sucesión. Es decir, el origen que le llevó a desarrollar el cálculo es obtener y calcular sumas. Además, introduce la notación dx para los diferenciales e interpreta la derivada como dy/dx, aunque es incapaz de aclarar qué son dichos infinitesimales.

Al igual que Newton, resuelve en uno solo todos los problemas que estaban abiertos: tangentes, integración y máximos y mínimos y ambos pasan a desarrollar un método general para resolver todos los problemas.

Euler (s. XVIII)

Euler contribuyó a mejorar el cálculo de la derivada y a partir de los desarrollos en serie de las funciones elementales deduce los correspondientes diferenciales y escribe las reglas de derivación para funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, así como las reglas de operaciones con derivadas. Sin embargo, el cálculo de las derivadas seguía sin ser un proceso claro y sistemático.

Cauchy (s. XIX)

Cauchy, a comienzos del siglo XIX, relacionó de forma clara el concepto de derivada con el de límite lo que permitió que el cálculo de derivadas se redujera a sencillas operaciones formales.

Para ello, estableció que dx era una cantidad cualquiera y $dy = f'(x)dx$. Esto es, la diferencial es la función lineal que aproxima a la función dada en el punto considerado. Además, distinguió claramente entre dy y Δy, comprendiendo este último como la variación de los valores de la función y obtuvo la regla de L'Hopital y las condiciones de extremo relativo.

Por último, para ser más precisos en la evolución histórica de las derivadas debemos referirnos a una investigación realizada desde el enfoque Ontosemiótico y desarrollada por Pino-Fan, Godino y Font (2011) donde se identifican nueve configuraciones epistémicas, cada una de las cuales a su vez lleva asociada un significado parcial distinto de la derivada, es decir, a lo largo de la historia las derivadas han ido adquiriendo diferentes significados. Entonces, para alcanzar una comprensión global de la derivada habría que abarcar dichas configuraciones: CE1) la tangente en la matemática griega; CE2) variación en la edad media; CE3) métodos algebraicos para hallar tangentes; CE4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; CE5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; CE6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; CE7) cálculo de fluxiones de Newton; CE8) cálculo de diferencias de Leibniz, y CE9) la derivada como límite.

Por tanto, cabe destacar que en esta propuesta se van a tener en cuenta los distintos significados de las derivadas enumerados en el párrafo anterior.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

A continuación, se van a presentar tres problemas que se constituyen en la razón de ser de las derivadas. El primero es un problema donde la solución es la derivada de la función en un punto, la cual se puede calcular con la fórmula de la velocidad instantánea estudiada en física; el segundo es un problema donde la solución son los intervalos donde la función crece y decrece y el valor en el que alcanza su máximo, los cuales se pueden obtener a través de la representación gráfica de la función ya que se trata de una parábola, y el tercero es un problema donde la solución es el valor máximo que puede tomar la función, el cual al igual que el problema 2 se puede obtener al representar gráficamente la función.

Problema 1: Un cuerpo de seguridad dispone de la gráfica espacio-tiempo del trayecto de un coche que ha tenido un accidente en el instante $t = 4$. Sabiendo que la velocidad permitida en esa carretera era de 100 km/h y que la rama de la parábola que representa el último tramo de viaje tiene por ecuación: $y = 10t^2 + 15t + 182{,}75$, ¿superaba dicho coche la velocidad permitida? Justifica tu respuesta.

Problema 2: Un estudio ha estimado que en los días de cuarentena la aglomeración de personas en un supermercado viene dada por la función $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 6x$, siendo *x* el número de horas que lleva abierto el supermercado y $10f(x)$ el número de personas en el supermercado. Si el Gobierno ha reducido el horario de apertura de 10 de la mañana a 8 de la tarde, indica los intervalos en los que el número de personas en el supermercado aumenta y disminuye. ¿En qué momento del día hay más personas en el supermercado?

Problema 3: (Marea Verde, 2019a) El coste diario de fabricación, en euros, de x artículos se expresa con la igualdad $C = 40x + 250$, y el ingreso diario de su venta, mediante $V = -2x^2 + 100x$. ¿Qué cantidad de artículos se deben fabricar al día para que su venta reporte un beneficio máximo?

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Para implementar en el aula los tres problemas planteados en el apartado anterior se ha considerado seguir la siguiente metodología.

Los problemas 1, 2 y 3 de la razón de ser se realizarán al comienzo de las sesiones en las que se trabajarán los campos de problemas sobre la velocidad instantánea de un móvil, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos de una función y los problemas de optimización respectivamente. Dichos problemas se resolverán en grupos heterogéneos de 3 o 4 personas y posteriormente se hará una puesta en común en la que participará toda la clase. El profesor leerá en voz alta el enunciado del problema y empezará a preguntar a los grupos uno por uno el método que han utilizado para resolver el problema. El profesor irá apuntando en la pizarra los diferentes métodos de resolución nombrados por sus alumnos y una vez que todos los grupos hayan argumentado el suyo pasará a explicar las estrategias óptimas para la resolución.

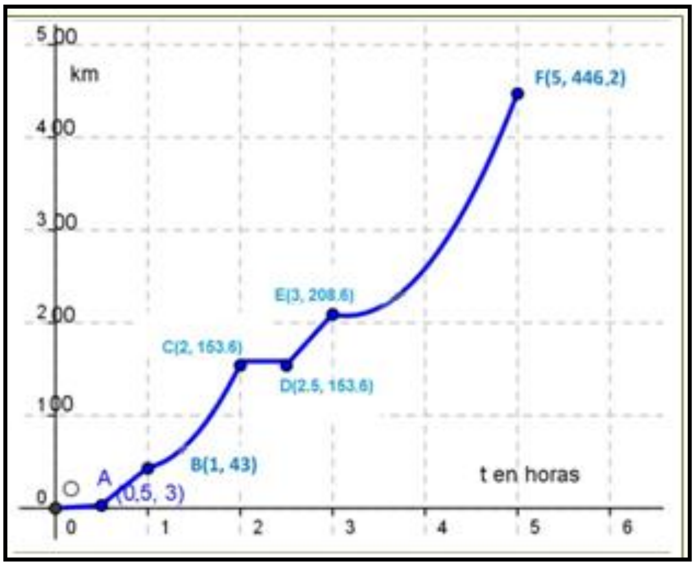
E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presenta en el aula.

A continuación, se presentan los problemas diseñados para trabajar las derivadas. Destacar que dichos problemas han sido elegidos porque son problemas cuya resolución requiere de la aplicación de las derivadas y están contextualizados dentro de situaciones de la vida cotidiana (cálculo de la velocidad media e instantánea de un móvil, estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos de una función que relaciona variables que intervienen en la vida real) lo que facilita la comprensión de algunos conceptos que se trabajan a lo largo de la unidad.

CP1.- Crecimiento medio de una función en un intervalo.

Problema 1.- (Marea Verde, 2019b)



Jorge y Adela han ido de viaje desde Madrid hacia Alicante. Han salido a las 12 horas. Llevan un aparato que les dice en todo momento cuánto tiempo llevan viajando desde que salieron y los kilómetros que llevan recorridos. Por eso saben que a la hora de haber salido de casa sólo han recorrido 43 kilómetros y que a las 2 horas han recorrido 153.6 kilómetros. Han representado gráficamente la función tiempo (horas) y distancia recorrida (km). Los tramos *OA*, *AB*, *CD* y *DE* los han representado con segmentos, y los tramos *BC* y *EF* con parábolas.

a) ¿Qué distancia han recorrido en total?

b) ¿Cuánto tiempo han tardado?

c) ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche durante el viaje?

d) ¿Cuál ha sido la velocidad media entre los instantes 1 y 3? ¿Y entre los instantes 3 y 5 horas?

e) En autovía la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿crees que en algún momento se ha sobrepasado? ¿Puedes estar seguro?

Problema 2.- En el Hospital Reina Sofía se ha hecho un estudio sobre cómo ha ido variando el número de nacimientos a lo largo del año. Los nacimientos fueron registrados mensualmente y los resultados aparecen en la siguiente tabla:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nacimientos	100	50	50	150	160	110	90	85	60	40	200	500

a) ¿Durante que meses hubo una mayor variación en el número de nacimientos?

b) ¿Cuál fue la tasa de variación media entre enero y marzo? ¿Y entre los meses de marzo y agosto?

c) ¿Qué indica una diferencia positiva en el cambio del número de nacimientos?

d) ¿Qué indica una diferencia negativa en el cambio del número de nacimientos?

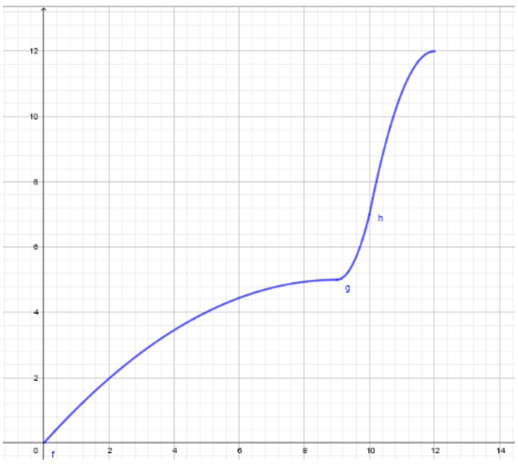
e) ¿Qué indica una diferencia nula en el cambio del número de nacimientos?

Problema 3.- Un equipo de matemáticos ha hecho un estudio sobre la cantidad de consolas que se venden durante el año y ha llegado a la conclusión de que la función que representa el número de consoladas vendidas al mes es $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 3x + 20$, donde x es el mes del año y $f(x)$ es el número de consolas en miles vendidas. ¿Cuál es la tasa de variación media entre los meses de mayo y agosto? ¿Y entre los meses de septiembre y diciembre?

<u>CP2.1- Obtención de la velocidad instantánea de un móvil.</u>

Problema 4.- (Marea Verde, 2019b) La rama de parábola que representa el último tramo del viaje del problema 1 tiene por ecuación: $y = 0.1x^2 + 118x - 146.3$ y en autovía la velocidad máxima permitida es de 120 km/h. Les han puesto una multa en el instante *t* = 4, ¿cuál ha sido la velocidad del coche en ese instante? ¿Es justa la multa?

Problema 5.- Juan estaba jugando en la calle con su dron cuando de repente perdió el control y en el instante $t = 10$s chocó contra una casa rompiéndose en mil añicos. El seguro que contrató cuando lo compró cubría cualquier rotura siempre y cuando el dron no hubiera superado la velocidad de 15km/h en el momento del impacto. El dron tiene un dispositivo que le permite saber en cada momento el tiempo que lleva navegando y la distancia recorrida. La gráfica muestra la relación entre el tiempo (segundos) y la distancia recorrida (metros).



La función de esta gráfica es:

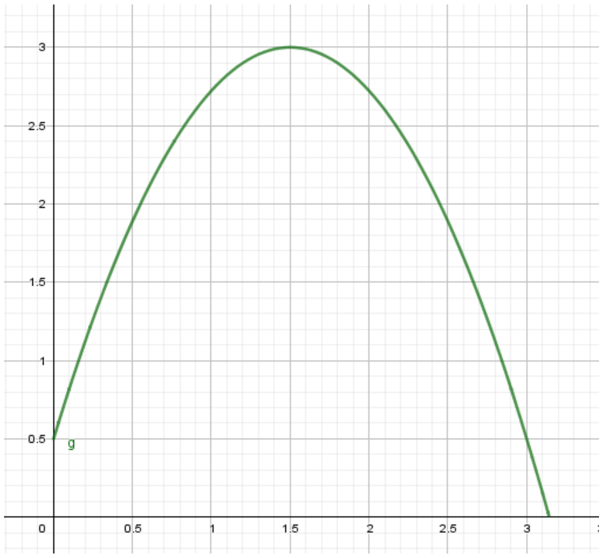
$$f(x)\begin{cases} \dfrac{-5}{81}x^2+\dfrac{10}{9}x & si \quad 0\le x\le 9 \\ 2x^2-36x+167 & si\ 9<x\le 10 \\ \dfrac{-5}{4}x^2+30x-168 & si\ 10<x\le 12 \end{cases}$$

a) Calcula la velocidad instantánea del dron en el momento del impacto.
b) Con la velocidad instantánea obtenida en a) justifica si el seguro le cubrirá a Juan el arreglo de su dron.

Problema 6. (Marea Verde, 2019b) La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0.2t^2 + 0.01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

<u>CP2.3- Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.</u>

Problema 7.- La gráfica que se presenta a continuación, describe la trayectoria que sigue una piedra al ser lanzada.



Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva que describe el lanzamiento de la piedra en el punto $x = 2$.

Problema 8.- En el parque de atracciones de Zaragoza la atracción Ramsés tiene la forma de la parábola que describe la ecuación $y = 0.92x^2 - 9.2x + 23$, donde x e y se miden en metros.

a) Calcula la pendiente en $x = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$. ¿Qué relación observas?

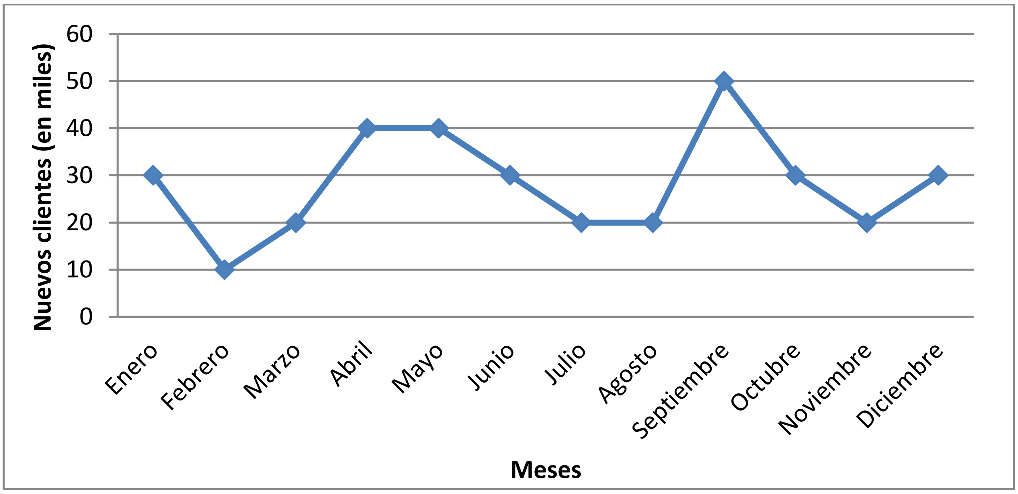
b) Calcula la recta tangente a la curva en $x = 0$.

c) Calcula la recta normal a la curva en $x = 23$.

Problema 9.- (Marea Verde, 2019b) Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.

CP4.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

Problema 10: Los directores de una compañía de teléfono han contratado a un grupo de matemáticos para que realicen un estudio en el que se recoja la información relativa al número de nuevos clientes en su compañía. Como resultado, el grupo de matemáticos les han entregado a los directores la siguiente gráfica:



a) ¿En qué mes o meses ha habido un mayor número de nuevos clientes?

b) ¿En qué mes o meses ha habido un menor número de nuevos clientes?

c) ¿En qué meses está aumentando el número de nuevos clientes? ¿En qué meses está disminuyendo el número de nuevos clientes?

Problema 11.- Un estudio estadístico ha estimado que el número de personas contagiadas con coronavirus por día en España viene dado por la función $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$, donde x es el tiempo expresado en semanas desde que se inició el brote, e y es el número de personas contagiadas al día en miles.

a) Calcula si el número de contagios al día crece o decrece durante la segunda semana.

b) ¿Durante qué semanas aumenta el número de contagiados por día?

c) ¿Durante qué semanas disminuye el número de contagiados por día?

Problema 12.- Propón un enunciado para el que se cumpla que:

- $f'(x) > 0$ en $[0,3] \cup [4,7]$
- $f'(x) = 0$ en $[3,4]$

Problema 13.- Elabora un enunciado en el que la relación entre la variable dependiente y la variable independiente venga dada por una función polinómica de grado dos y tenga un máximo en $(3,6)$ y pase por el punto $(6,0)$.

CP5.- Optimización de funciones.

Problema 14.- El colegio quiere vallar una zona del patio con forma rectangular para plantar un huerto ecológico. Si disponen de 500 metros de malla, ¿cómo deben ser las dimensiones del huerto para que el área que encierra sea máxima?

Problema 15.- Una de las pruebas del concurso matemático al que acudieron algunos de los alumnos de Bachillerato consistía en construir una cometa a partir de un palo de madera de 1.5m de longitud. Dado que la prueba la ganaba aquel grupo que fabricará la cometa con el área más grande, ¿a qué distancia deberán cortar el palo los alumnos para ganar?

Problema 16.- En una gasolinera quieren construir un barril cilíndrico con una capacidad de 300 litros. Halla el radio y la altura del cilindro para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

CP1.- Crecimiento medio de una función en un intervalo.

La mayoría de los libros de texto introducen el concepto de derivada a través de la fórmula que permite hallar la tasa de variación media de una función en un intervalo. Con estos tres problemas planteados se pretende que los alumnos vayan más allá de los ejercicios tipo que suelen proponer los libros y sean ellos mismos los que obtengan la fórmula de la T.V.M y una vez la hayan obtenido y comprendido la apliquen para resolver un problema.

Con el primer problema se pretende que los alumnos sean capaces de calcular la velocidad media de un coche en diferentes intervalos de tiempo a partir de la gráfica espacio-tiempo que representa el trayecto recorrido; con el segundo se pretende que hallen la variación del número de nacimientos entre los diferentes meses del año a partir de una tabla de valores que representa el número de nacimientos por mes y sean capaces de interpretar el significado del signo obtenido; y con el tercero, se pretende que calculen la tasa de variación media de una función a partir de su expresión analítica. Estos problemas permiten que se introduzca y se institucionalice el concepto de T.V.M.

<u>CP2.1- Obtención de la velocidad instantánea de un móvil.</u>

En muchos de los libros de texto no trabajan este campo de problemas. Una vez explicado el concepto de tasa de variación media pasan a dar la fórmula que permite hallar la derivada de una función en un punto. En esta propuesta se pretende que los alumnos vean la relación existente entre la velocidad media (T.V.M de una función espacio-tiempo) y la velocidad instantánea de un móvil y así puedan comprender mejor de donde se obtiene la fórmula que permite hallar la derivada de una función en un punto.

Con el problema 4 se pretende que los alumnos sean capaces de descubrir por ellos mismos la fórmula que permite calcular la velocidad de un móvil en un instante determinado a partir del estudio de la velocidad media en intervalos cada vez más pequeños; y en los problemas 5 y 6 se quiere que los alumnos apliquen la fórmula obtenida en el problema 4 para hallar la velocidad instantánea en diferentes instantes de tiempo. Estos problemas permiten que se introduzca el concepto de derivada en un punto.

<u>CP2.3- Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.</u>

En este campo de problemas no hay mucha diferencia de los problemas que se presentan en la mayoría de los libros de texto.

En el problema 7 los alumnos deben de hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos a partir de la gráfica que representa dicha curva; en el problema 8 deben hallar tanto la ecuación de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos como la ecuación de la recta normal a la curva en dicho punto a partir de la expresión analítica de la función; y en el problema 9 se pide nuevamente calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos. Estos problemas permiten trabajar una de las aplicaciones de las derivadas, hallar la ecuación de la recta tangente a una función en uno de sus puntos.

CP4.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

Los problemas diseñados para trabajar este campo de problemas no varían mucho de los que se presentan en la mayoría de los libros de texto.

El problema 10 es un problema de introducción que pretende repasar algunas de las características de las funciones como la monotonía y los extremos relativos; en el problema 11 los alumnos tienen que estudiar la función que relaciona las variables que intervienen en el problema y que viene expresada de forma analítica en el enunciado a través del cálculo de su derivada para responder a una serie de preguntas sobre un contexto real; y en los problemas 12 y 13 los alumnos tienen que analizar las características de una función a partir de su derivada para proponer un enunciado cuya función cumpla todas y cada una de las características dadas. Estos problemas permiten trabajar otra de las aplicaciones de las derivadas, el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de una función.

CP5.- Optimización de funciones.

En este campo, los problemas planteados son muy similares a los que aparecen en los libros de texto analizados anteriormente.

En los problemas 14, 15 y 16 los alumnos tienen que plantear el problema, es decir, plantear la función que quieren maximizar o minimizar y la ecuación que relacione las dos variables que intervienen en el problema. Y una vez que tengan el problema planteado tendrán que obtener los puntos críticos de la función y estudiar si se tratan de máximos o mínimos para dar la solución del problema. Estos problemas permiten trabajar otra de las aplicaciones de las derivadas, la optimización de funciones.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Todos los problemas planteados se realizarán en el aula ordinaria y a la hora de impartirlos se seguirá la siguiente metodología:

Los problemas 1, 2, 4 y 10 se trabajarán antes de introducir el concepto de tasa de variación media, la derivada de una función en un punto y los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos de una función respectivamente. Serán resueltos en grupos heterogéneos de 3 o 4 personas y posteriormente se hará una puesta en común entre toda la clase. El profesor leerá en voz alta el enunciado del problema y empezará a preguntar a los grupos uno por uno el método que han utilizado para resolver el problema. El profesor irá apuntando en la pizarra los diferentes métodos de resolución nombrados por sus alumnos y una vez que todos los grupos hayan argumentado el suyo pasará a explicar las estrategias óptimas para su resolución.

Los problemas 7, 9, 12, 14 y 15 los resolverá el profesor en la pizarra con ayuda de los alumnos, es decir, el profesor irá preguntando a los alumnos cada uno de los pasos que darían para resolverlos y escribirá en la pizarra todas las estrategias que le vayan diciendo para después explicar la estrategia correcta que deben seguir.

Para realizar los problemas 3, 5, 6, 8, 11, 13 y 16 se explicarán y enseñarán a los alumnos los diferentes conceptos y técnicas necesarias para su resolución previamente. Los alumnos trabajarán individualmente y a cada uno de ellos se le entregará una hoja con todos los enunciados. Al final de cada sesión, los alumnos dispondrán de minutos para trabajar de forma autónoma los problemas relacionados con los nuevos conceptos aprendidos y algunos de estos problemas se mandarán de deberes. El profesor estará de apoyo por si a alguno de los alumnos le surge alguna duda. Al comienzo de la siguiente sesión, se hará una puesta en común entre toda la clase para comentar los resultados que ha obtenido cada uno y se escribirán y comentarán en la pizarra tanto las estrategias correctas como las erróneas ya que ambas influyen en el aprendizaje.

Plantear los problemas en contextos reales hace que los alumnos comprendan y valoren más la importancia y utilidad de las derivadas ya que gracias a ellas podemos obtener información de diferentes situaciones que nos podemos encontrar en la vida diaria. Por ejemplo, las derivadas son utilizadas por los radares para detectar la velocidad de un vehículo en el momento justo en el que pasan por él o por las empresas para tomar las decisiones que las lleven a obtener el máximo beneficio.

F. Sobre las técnicas

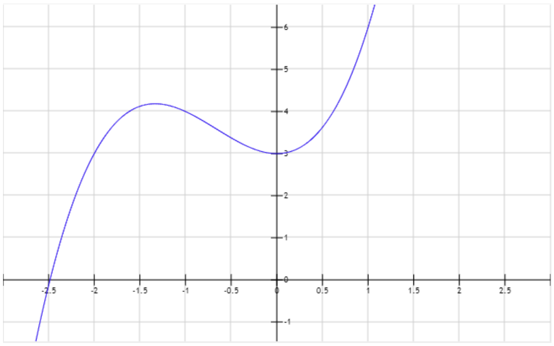
1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

A continuación, se presentan una serie de ejercicios que los alumnos deberán realizar para practicar las diferentes técnicas vistas en clase o descubrir nuevos conceptos.

<u>CP1.- Crecimiento medio de una función en un intervalo.</u>

Ejercicio 1.- Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en los intervalos $[1,3]$, $[4,4+h]$. Justifica como es la función en el intervalo $[1,3]$.

Ejercicio 2.- Determina la tasa de variación media de esta función en los intervalos $[-1,0]$ y $[0,1]$. ¿Qué observas?



Ejercicio 3.- Calcula el valor que tiene que tener a para que la tasa de variación media de la función $f(x) = 3x^2 + ax + 3$ en el intervalo $[0,2]$ sea 3.

<u>CP2.2.- Obtención de la derivada en un punto.</u>

Ejercicio 4.- Abre el programa *GeoGebra.*

1.- Introduce en la "Entrada" la expresión $x^3 + 6x$.

2.- En la barra de herramientas pincha en la 2ª casilla y elige un punto A cualquiera de la curva, por ejemplo $A = (-2,4)$.

3.- En la barra de herramientas selecciona la 4ª casilla empezando por la izquierda y toma la herramienta "Tangentes". Entonces, pincha el punto A y la curva obtenida en el paso 1. ¿Cuál es la pendiente de la recta obtenida?

4. Introduce en la "Entrada" Derivada(f). Observando dicha gráfica, ¿cuánto vale la función $f'(x)$ en $x = -2$?

5. Haz lo mismo para $B = (-1,2)$.

¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto y la función derivada en ese punto?

Ejercicio 5.- Abre el programa *GeoGebra*.

1.- Introduce en la "Entrada" la expresión $x^5 + 4x^2$.

2.- Elige dos puntos A y B de la curva de forma que $x_A < x_B$.

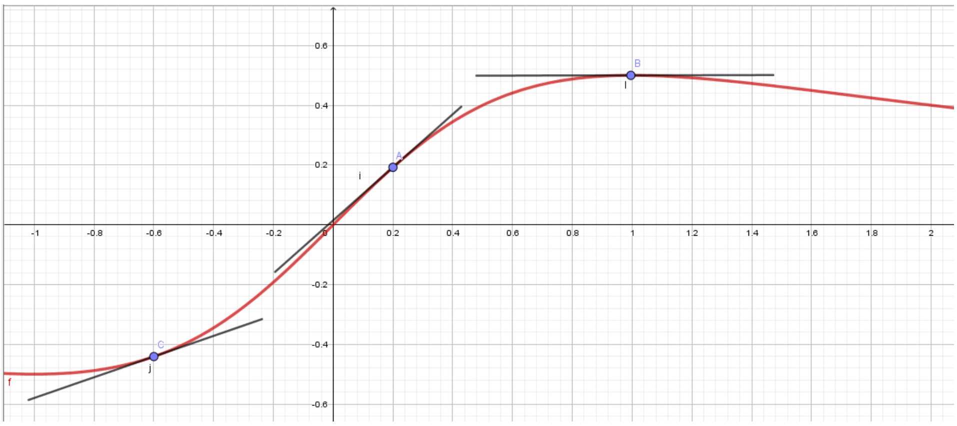
3.- Une con una recta los puntos A y B. Dibuja una recta paralela al eje X que pase por B y una recta paralela al eje Y que pase por A de forma que estas dos rectas se intersequen en un punto C. Después dibuja el segmento AC y BC.

4.- Pon en la "Entrada" la expresión $a = x(A)$ y $b = x(B)$ para obtener las abscisas de los puntos A y B respectivamente.

5.- Crea un cuadro de texto que te calcule la T.V.M. en función de a y b.

Observa que la T.V.M. y la recta que une los puntos A y B van variando conforme mueves el punto B a lo largo de la curva. ¿Cómo es la recta que une los puntos A y B cuando estos se aproximan? ¿Qué relación guarda con el ejercicio anterior?

Ejercicio 6.- Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = 0.2$, $x = 1$ y $x = -0.6$ y responde.



a) ¿Cuál es el valor de $f'(0.2)$, $f'(1)$ y $f(-0.6)$?

b) ¿En alguno de los puntos anteriores la derivada se anula? ¿Qué observas?

c) En $x = 0$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 2$?

Ejercicio 7.- Calcula la derivada de las funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = x^2 + x$ en $x = 3$

b) $f(x) = (3x^2 + 2)^2$ en $x = 0$

c) $f(x) = \frac{4x+3}{2}$ en $x = -1$

Ejercicio 8.- Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1,\ x = 3$ y $x = 5$:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ b) $f(x) = -2x - 3$ c) $f(x) = x^2 + 2$ d) $f(x) = x^3 + 6$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa? ¿Y las derivadas de las funciones polinómicas de segundo y tercer grado?

<u>CP2.3- Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.</u>

Ejercicio 9.- Determina las ecuaciones de la rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto indicado.

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ en $x = -2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = -1$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2$ en los puntos de corte con los ejes X e Y.

Ejercicio 10.- Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x - 2$ paralela a la recta $y = 3x - 6$.

Ejercicio 11.- (Santillana, 2015) Determina los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por (3,0) y las rectas tangentes a su gráfica en $x = 2$ y $x = 4$ sean paralelas al eje X.

<u>CP3.1- Obtención de la función derivada.</u>

Ejercicio 12.- Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición.

a) $f(x) = x^3 + x$ b) $f(x) = \frac{x^2+3}{2}$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ f) $f(x) = \frac{3x-2}{3}$

Ejercicio 13.- Dibuja las rectas $f(x) = 2$ e $f(x) = x$ y la parábola $f(x) = x^2$. A continuación, calcula $f'(-2), f'(0)\ y\ f'(2)$ para cada una de las funciones. ¿Qué observas? Determina para cada $f(x)$ su función derivada.

Ejercicio 14.- Abre la aplicación *GeoGebra* e introduce en "Entrada" la siguiente expresión x^3. A continuación, introduce en "Entrada" la expresión Derivada(x^3). Haz lo mismo con las funciones x^4 y x^5. ¿Qué observas?

Ejercicio 15.- Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ d) $f(x) = \frac{\sqrt[2]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x^4}$

e) $f(x) = sen\,x$ f) $f(x) = \frac{sen\,x}{\cos x}$ g) $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}}$ h) $f(x) = 3^{2x}\cdot 3^{-x}$

i) $f(x) = \ln x$ j) $f(x) = \log_5 x$ k) $f(x) = \ln \mathrm{e}^{\mathrm{x}^2}$

Ejercicio 16.- Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 + 6x + 3$ b) $f(x) = e^x \cdot \cos x$ c) $f(x) = \frac{x^2+x+3}{sen\,x}$

d) $f(x) = 4\ln x - 3^x$ e) $f(x) = arcsen\,x \cdot \log_3 x$ f) $f(x) = \frac{x^5\cdot tag\,x}{x^3}$

Ejercicio 17.- Escribe las funciones que componen las siguientes funciones y halla sus derivadas.

a) $f(x) = log_3(2x+1)$ b) $f(x) = 2^{3x-4}$

c) $f(x) = arctag\,e^x$ d) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-1}$

Ejercicio 18.- Aplica las reglas de derivación para calcular la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{\cos x}$ b) $f(x) = x^{2x}$ c) $f(x) = 2x\cdot\cos(2x)$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{1-x}}$ e) $f(x) = \ln 2x + \tan x$ f) $f(x) = \sqrt[2]{x^3+2}$

g) $f(x) = \frac{\ln x+4}{e^x}$ h) $f(x) = e^x sen\,x$ i) $f(x) = arcsen(x^2)$

<u>CP3.2- Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos.</u>

Ejercicio 19.- Halla la función derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} + 3x - 1 & \text{si} \quad x < 4 \\ 5x - 5 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Ejercicio 20.- Determina los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + a & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -x^2 + bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

CP4.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

Ejercicio 21.- Abre el programa *GeoGebra*.

1.- Introduce en "Entrada" la expresión $x^2 + 6$. Observando la gráfica de $f(x)$ responde a las siguientes preguntas:

a) ¿En qué intervalos la función crece? ¿Y en cuáles decrece?
b) ¿Tiene extremos relativos? ¿Dónde?

2.- Introduce en "Entrada" la expresión Derivada(f). Observando la gráfica de esta nueva función que has obtenido, $f'(x)$, responde a las siguientes preguntas:

c) ¿En qué intervalos la función es negativa ($f'(x) < 0$)? ¿Y en cuáles es positiva ($f'(x) > 0$)?
d) ¿En qué punto la función derivada vale 0 ($f'(x) = 0$)?

3.- Introduce en "Entrada" la expresión Derivada(f'). Observando la gráfica que has obtenido responde a la siguiente pregunta:

e) ¿Cómo es $f''(0)$ positiva o negativa?

Compara las respuestas de los apartados a) y c) y las de b),d) y e). ¿Qué observas?

4. Repite los 3 pasos anteriores para la función $y = x^3 - 6x + 9x$.

Nombra todas las conclusiones que has obtenido al realizar los dos ejercicios.

Ejercicio 22.- Estudia el crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos:

a) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 + 1/x^2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ f) $f(x) = -\sqrt{|x|}$

Ejercicio 23.- ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

a) Si $f'(x) \neq 0\ \forall x \in Dom\ f$ entonces la función es creciente o decreciente en todo su dominio.

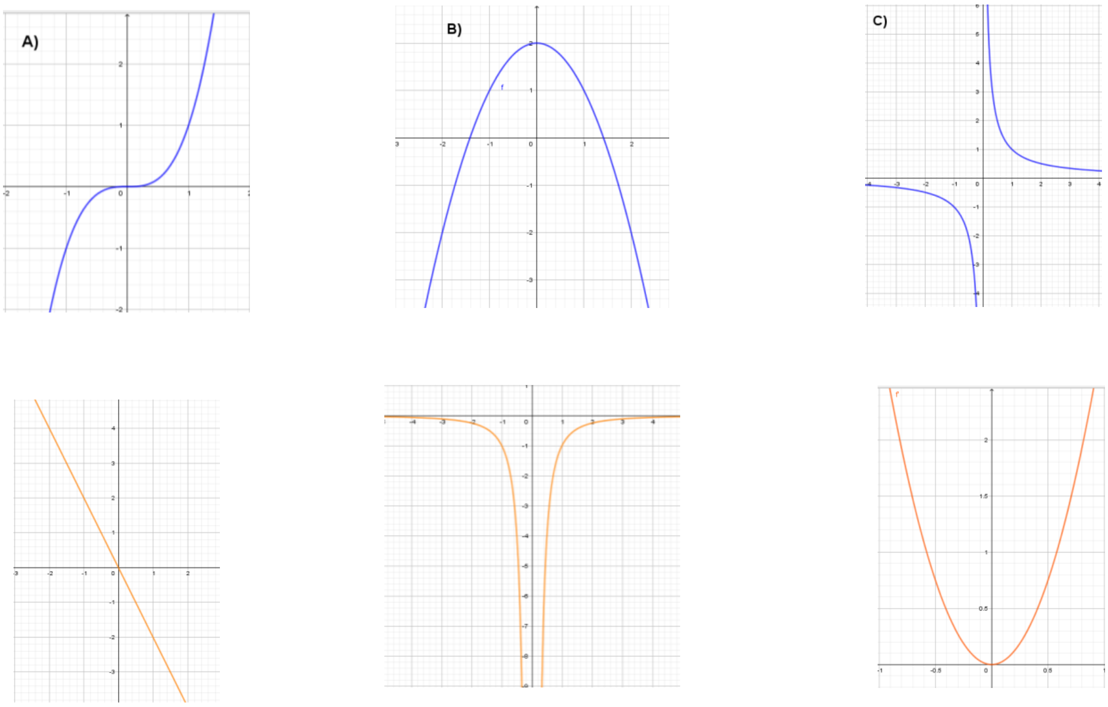
b) Si $f'(a) = 0$ entonces la función es constante en a.

c) Si $f''(a) \neq 0$ entonces hay máximo o mínimo en a.

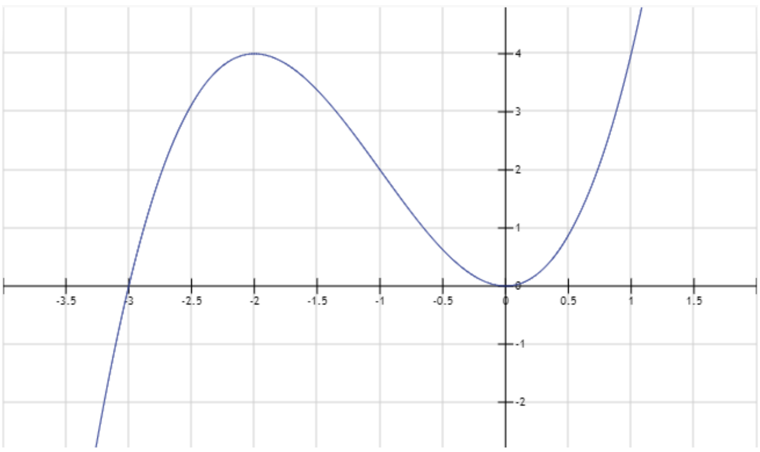
Ejercicio 24.- (Santillana, 2015) Indica toda la información que sea posible sobre el punto $x = a$ de la función $f(x)$ en cada caso.

a) $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f(a) = 3 \\ f(x) \leq 3 \ \forall x \end{cases}$

Ejercicio 25.- Asocia a cada una de las gráficas A, B, C la gráfica de su función derivada. Razona tu respuesta.



Ejercicio 26.- Representa gráficamente la derivada de la siguiente función.



CP6.1- Representación gráfica de una función dadas sus características.

Ejercicio 27.- (Santillana, 2015) Representa gráficamente una función que tenga las siguientes características.

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- Tiene una asíntota oblicua en $y = x$.
- $f'(x) > 0$ en los intervalos $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$
  $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-2, 0)$ y $f'(-2) = 0$.

CP6.2- Estudio de las características de una función y representación gráfica de la misma.

Ejercicio 28.- Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

d) $f(x) = x - \frac{x+4}{x-3}$

CP6.3- Relacionar una característica (dominio, monotonía, extremos relativos…) con la función que la posee.

Ejercicio 29.- (Santillana, 2015) Relaciona cada una de las siguientes características con la función que las posea.

- Su máximo es $(0, -1)$.
- Tiene dos asíntotas verticales.
- La tangente es horizontal para $x = 1$ y $x = -1$.
- Su máximo es $(1,4)$.
- Es creciente siempre.

$f(x) = \frac{x^3+x^2+x}{10}$ $\quad g(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ $\quad h(x) = -x^3 + 3x + 2$

$i(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$ $\quad j(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$ $\quad k(x) = -x^2 - 2x - 1$

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

CP1.- Crecimiento medio de una función en un intervalo.

En los ejercicios 1, 2 y 3 los alumnos ejercitan la técnica para calcular la tasa de variación media en un intervalo. En el primero tienen que hallar la T.V.M de una función a partir de su expresión analítica, en el segundo a partir de su gráfica y en el tercero tienen que hacer uso de la T.V.M para hallar el valor de un parámetro.

CP2.2.- Obtención de la derivada en un punto.

En los ejercicios 4 y 5 los alumnos hacen uso del programa *GeoGebra* para facilitar el aprendizaje de la técnica para calcular el límite de la T.V.M cuando $h \to 0$ y la derivada de una función en un punto y se den cuenta de la relación que existe entre la tasa de variación instantánea, la recta tangente a una curva en un punto y la función derivada en dicho punto. Y con los ejercicios 6, 7 y 8 se pretende que los alumnos sigan ejercitando la técnica para calcular la derivada de una función en un punto y puedan descubrir la regla general para calcular las derivadas de las funciones polinómicas de primer grado.

CP2.3- Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

Con los ejercicios 9, 10 y 11 ejercitan la técnica para calcular la derivada de una función en un punto y la técnica para calcular la ecuación punto-pendiente de una recta, la cuál es una técnica que fue trabajada anteriormente en una unidad didáctica de geometría. Asimismo, con el ejercicio 10 también se ejercita la técnica para calcular el punto donde la primera derivada toma un cierto valor.

CP3.1- Obtención de la función derivada.

Con los ejercicios 12, 15, 16, 17 y 18 los alumnos ejercitan la técnica para hallar la primera derivada de una función a partir de la definición o las reglas de derivación. Además, con los ejercicios 13 y 14, este último mediante el programa *GeoGebra*, se pretende que los alumnos puedan descubrir y comprender por sí solos la regla para derivar funciones potenciales.

CP3.2- Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos.

Con los ejercicios 19 y 20 los alumnos ejercitan la técnica para hallar la primera derivada de una función definida a trozos. Asimismo, en el ejercicio 20 deberán calcular el valor de los parámetros para que la función sea derivable en un punto, por lo que se deberá utilizar la técnica para hallar los límites laterales de una función, técnica trabajada en la unidad didáctica en la que se estudiaban los límites de una función.

CP4.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

Con el ejercicio 21 se pretende que los alumnos haciendo uso del programa *GeoGebra* descubran por ellos mismos la relación que existe entre la primera y segunda derivada de una función con la monotonía y los extremos relativos de dicha función. En los ejercicios 22, 23, 24, 25 y 26 se ejercita la técnica para hallar la primera y segunda derivada, la técnica para obtener los puntos críticos de una función, es decir, hallar los puntos que cumplen la ecuación $f'(x) = 0$ y la técnica para estudiar el signo de la primera derivada a ambos lados de los puntos críticos y de la segunda derivada en los puntos críticos para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de una función respectivamente. En el ejercicio 22 se pide calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de una función a partir de su expresión analítica; en el 23, con la teoría sobre la monotonía y los extremos relativos hay que razonar si una serie de afirmaciones son verdaderas o falsas; en el 24 se dan una serie de datos sobre un punto determinado y a partir de ellos hay que indicar todo la información que sea posible sobre dicho punto; y en los ejercicios 25 y 26 se da la representación de una función o de la derivada de una función y hay que relacionarla con su función derivada o con su función respectivamente.

CP6.- Representación gráfica de funciones.

Con los ejercicios 27, 28 y 29 los alumnos ejercitan las mismas técnicas que en el campo de problemas anterior ya que se requiere el estudio de la monotonía y los extremos relativos de las funciones y otras técnicas ejercitadas en unidades didácticas anteriores, como hallar el dominio de una función, los puntos de corte con los ejes, la simetría de la función… En el ejercicio 27 se pide representar una función que cumpla una serie de condiciones dadas; en el ejercicio 28 se requiere estudiar todas y cada una de las características de una función para después representarla gráficamente; y, en el ejercicio

29 se pide relacionar cada característica dada con la función que la posee.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas que se ejercitan con la realización de los ejercicios planteados en el apartado anterior son imprescindibles para poder enfrentarse a la resolución de los campos de problemas asociados al concepto de derivada. Para empezar a plantear un problema se necesita una buena base teórica además de un alto nivel de reflexión y razonamiento y los alumnos suelen conseguir todo esto a través de la práctica dirigida, es decir, a través de la realización de ejercicios.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Al comienzo de la unidad se entregará a los alumnos una hoja con todos los ejercicios que se irán haciendo a lo largo de la unidad. Algunos de ellos se realizarán en clase y otros se mandarán de deberes para casa.

Para la realización de los ejercicios 4, 5, 13, 14 y 21 se necesita el programa *GeoGebra* por lo que la clase se impartirá en la sala de informática y los alumnos trabajarán por parejas. Dichos ejercicios se propondrán antes de explicar la interpretación geométrica de la derivada, introducir las reglas de derivación y trabajar la monotonía y los extremos relativos de una función respectivamente. Una vez que todos hayan acabado se pondrán en común las conclusiones obtenidas por cada una de las parejas y se institucionarán aquellos conceptos que aparecen en su resolución.

El resto de ejercicios se realizarán en el aula ordinaria o en casa como deberes. Los ejercicios 9(a, c), 11, 12(a, b), 19, 20, 22(a, f), 24, 26, 27, 28(a, b) y 29 los resolverá el profesor en la pizarra con ayuda de los alumnos, es decir, el profesor irá preguntando a los alumnos cada uno de los pasos que darían para resolverlos y escribirá en la pizarra todas las estrategias que le vayan diciendo para después explicar la estrategia correcta que deben seguir. Para la resolución del resto de ejercicios los alumnos trabajaran individualmente para ejercitar y asimilar los nuevos conceptos y técnicas explicados al comienzo de la clase o en los ejercicios realizados entre toda la clase en la pizarra. Mientras los alumnos están trabajando el profesor se moverá por la clase respondiendo a las dudas y ayudando a aquellos alumnos que lo requieran. Los ejercicios que no les haya dado tiempo de acabar en clase deberán terminarlos para la siguiente sesión ya que algunos de ellos saldrán a corregirlos a la pizarra y se pondrán en común todas las estrategias correctas y erróneas utilizadas por el resto de los alumnos dado que los errores forman parte del aprendizaje.

G. Sobre las técnicas

1. ¿Mediante que razonamientos se van a justificar las técnicas?

En esta unidad didáctica, la mayoría de las técnicas utilizadas y que han sido listadas en el apartado A.2, quedan justificadas por las definiciones de los conceptos que se trabajan y también por la representación gráfica de la función y la función derivada. A continuación, vamos a dar las definiciones que se facilitan para cada campo de problemas.

CP1.- Crecimiento medio de una función en un intervalo.

La técnica que se ejercita en este campo de problemas, T1, queda justificada mediante la definición de tasa de variación media. La definición de T.V.M. que se considera adecuada para trabajar esta unidad es la siguiente: la tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, a+h]$, donde h es la longitud del intervalo, es el cociente $T.V.M.([a, a+h]) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

CP2.- Interpretación física, geométrica y algebraica de la derivada en un punto.

En este campo de problemas las técnicas trabajadas, T2 y T3, quedan justificadas mediante las diferentes formas de definir la derivada de una función en un punto $x = a$, es decir, $f'(a)$:

- Si la función es una función espacio-tiempo, la deriva $f'(a)$ es la **velocidad instantánea** en $t = a$.
- Geométricamente, la derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $P(a, f(a))$.
- La derivada $f'(a)$ se obtiene calculando el límite: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Asimismo, en este campo de problemas también se han necesitado tecnologías trabajadas e institucionalizadas en unidades didácticas anteriores.

CP3.- Obtención de la derivada a partir de la expresión analítica.

En este campo de problemas las técnicas utilizadas, T4, T5 y T6, quedan justificadas mediante la definición de función derivada, la cual da lugar a las reglas de derivación y la definición de función derivable en $x = a$. A continuación, pasamos a presentar las definiciones que proporcionaremos a los alumnos.

- La **función derivada** de una función $f(x)$ es una función, $f'(x)$, que asocia a cada punto x la derivada de $f(x)$ en ese punto.

$$\begin{aligned} f'\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

- Una **función es derivable en $\boldsymbol{x = a}$** si existe el límite $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ y es finito.

CP4.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

En este campo de problemas las técnicas trabajadas en ellos, T4, T6, T7, T8 y T9, quedan justificadas mediante la definición de función derivada que aparece en el campo de problemas anterior, las reglas de derivación y las siguientes definiciones:

- Se llaman **puntos críticos** de una función a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que la derivada es cero. Las abscisas de los puntos críticos son las soluciones de $f'(x) = 0$.
- Una **función** es **creciente** en un punto $x = a$ cuando la derivada de la función en ese punto es positiva.

$$f'(a) > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } x = a$$

- Una **función** es **decreciente** en un punto $x = a$ cuando la derivada de la función en ese punto es negativa.

$$f'(a) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } x = a$$

- Si una función presenta un **máximo** o un **mínimo** en $x = a$, se cumple que $f'(a) = 0$.
- La función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en $x = a$ si en ese punto pasa de ser creciente a decreciente.

- La función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en $x = a$ si en ese punto pasa de ser decreciente a creciente.

- Una función tiene un **mínimo** en un punto $x = a$ si la derivada se anula y la derivada segunda es positiva en dicho punto.

$$f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) > 0 \rightarrow f(a) \text{ tiene un mínimo en } x = a.$$

- Una función tiene un **máximo** en un punto $x = a$ si la derivada se anula y la derivada segunda es negativa en dicho punto.

$$f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) < 0 \rightarrow f(a) \text{ tiene un máximo en } x = a.$$

CP5.- Optimización de funciones.

En este campo de problemas las técnicas que se trabajan, T4, T6, T7, T8, T9 y T10, se justifican mediante las mismas definiciones dadas en el campo de problemas anterior, además de otras tecnologías institucionalizadas en unidades didácticas anteriores.

CP6.- Representación gráfica de funciones.

En este campo de problemas las técnicas T4, T6, T7, T8 y T9 quedan justificadas a través de las definiciones dadas en el campo de problemas CP4. Asimismo, también se requiere repasar algunas definiciones dadas en unidades didácticas anteriores relacionadas con la representación de funciones como son la definición de dominio, de cortes con los ejes, de simetría y de asíntota vertical, horizontal y oblicua.

2. ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Después de que los alumnos realicen algunos de los problemas y ejercicios presentados en los apartados E y F de la propuesta didáctica en los que se trabajan y descubren conceptos relacionados con las derivadas, el profesor, con la participación de los alumnos, procederá a institucionalizar los conceptos y a justificar las técnicas utilizadas.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

El proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático que se va a seguir es el que aparece a continuación:

Una vez realizados y comentados los problemas 1 y 2 en la pizarra se pasará a introducir la definición de tasa de variación media. Tras trabajar el campo de problemas titulado "Obtención de la velocidad instantánea de un móvil" y realizar los ejercicios 4 y 5 se pasará a dar las diferentes definiciones de derivada de una función en un punto y la definición de función derivable en un punto. Trabajados los campos de problemas asociados a la derivada de una función en un punto se pasará a introducir la definición de función derivada. Después de trabajar los ejercicios 13 y 14 por parejas y poner en común las conclusiones obtenidas por cada pareja se institucionarán las reglas de derivación de las funciones elementales y seguido las reglas de operaciones con derivadas, la regla de la cadena y el método de derivación logarítmica. Por último, después de que los alumnos realicen el ejercicio 21 por parejas y se haga una puesta en común con las conclusiones obtenidas por cada pareja se darán las definiciones de punto crítico, de función creciente y decreciente y de máximo y mínimo relativo.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Como hemos ido mencionando en los apartados anteriores, la metodología que se seguirá para implementar la institucionalización de los conceptos será la siguiente:

Al comienzo de la unidad se entregará a los alumnos una hoja con todos los problemas y ejercicios que se realizarán a lo largo de la unidad. En cada sesión se indicará a los alumnos los problemas y ejercicios que deberán realizar tanto en clase como en casa de deberes. La mayoría de ejercicios y problemas los realizarán individualmente, únicamente realizarán por parejas aquellos ejercicios en los que se requiera el uso del programa *GeoGebra* o por grupos de 3 o 4 personas aquellos problemas y ejercicios que se utilizan para institucionar conceptos que surgen en ellos. Algunos de los ejercicios y problemas los tendrán que resolver sin antes haberles explicado los conceptos que se trabajan en ellos, pero para otros sí que se habrán introducido los conceptos necesarios para su resolución. Se les dejará un tiempo para que resuelvan los ejercicios propuestos y una vez que el profesor ha visto que los alumnos han llegado a descubrir los conceptos deseados se corregirán en la pizarra o se hará una puesta en común con las conclusiones obtenidas por los diferentes alumnos. Una vez surgidos dichos conceptos se institucionalizarán. Y, por último, una vez realizada la institución se propondrán ejercicios y problemas para que los alumnos practiquen las técnicas relacionadas con los conceptos institucionalizados.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores y duración temporal aproximada.

La unidad didáctica de las derivadas tendrá una duración total de 18 sesiones (50 minutos cada una). La secuenciación de las diferentes actividades propuestas y su duración aproximada se presentan en la siguiente tabla:

SESIÓN	CONTENIDOS	ACTIVIDADES	DURACIÓN
1	Prueba de evaluación inicial	Realización de la prueba	25 minutos
		Corrección de la prueba en la pizarra	25 minutos
2	Crecimiento medio de una función en un intervalo	Problemas 1 y 2 en grupos y puesta en común	25 minutos
		Institucionalización de T.V.M	15 minutos
		Ejercicios 1 y 2 individualmente y corrección en la pizarra	10 minutos
		Deberes: problema 3 y ejercicio 3	
3	Derivada de una función en un punto. Velocidad instantánea	Corrección de los deberes mandados	5 minutos
		Problema 4 y problema 1 de la razón en grupos y puesta en común	20 minutos
		Realización de los Problema 5 y 6 individualmente	15 minutos
		Corrección de los problemas 5 y 6 con puesta en común	10 minutos
4	Derivada de una función en un punto.	Ejercicios 4 y 5 por parejas y puesta en común	35 minutos
		Institucionalización de la definición de derivada de una función en un punto	15 minutos

	Interpretación geométrica	Deberes: ejercicios 6, 7 y 8	
5	Recta tangente y normal	Realización de los ejercicios 9 a) y c) y 11 y el problema 9 en la pizarra	20 minutos
		Resolución de los problemas 7 y los ejercicios 9 b) y 10 individualmente y su corrección en la pizarra	30 minutos
		Deberes: Problema 8	
6	Función derivada	Corrección de los deberes de la sesión 4 y 5	20 minutos
		Institucionalizar la definición de función derivada y realización del ejercicio 12 a) y b) en la pizarra	10 minutos
		Realización del ejercicio 12 c), d), e) y f) individualmente y corrección en la pizarra	20 minutos
7	Reglas de derivación	Realización de los ejercicios 13 y 14 por parejas y puesta en común	30 minutos
		Institucionalización de las reglas de derivación de funciones elementales y operaciones con funciones	20 minutos
		Deberes: ejercicios 15 y 16	
8	Regla de la cadena y método de derivación logarítmica	Corrección de los ejercicios de la sesión anterior	20 minutos
		Explicación de la regla de la cadena y del método de derivación logarítmica	30 minutos
		Deberes: Ejercicios 17 y 18	
		Corrección de los ejercicios mandados la sesión anterior	30 minutos

9	Derivabilidad de funciones definidas a trozos	Realización de los ejercicios 19 y 20 en la pizarra	20 minutos
10	Monotonía y extremos relativos de una función	Realización del problema 2 de la razón de ser y el problema 10 en grupos y puesta en común	20 minutos
		Realización del ejercicio 21 por parejas y puesta en común	30 minutos
11	Monotonía y extremos relativos de una función	Institucionalizar la definición de función creciente y decreciente y máximo y mínimo relativo a partir del signo de la primera y segunda derivada	20 minutos
		Realización de los ejercicios 22 a) y f), 24 y 26 y el problema 12	30 minutos
		Deberes: Ejercicios 22 b), c), d) y e), 23 y 25 y problemas 11 y 13	
12	Optimización de funciones	Corrección de los ejercicios de la sesión anterior	30 minutos
		Realización del problema 3 de la razón de ser en grupos y puesta en común	20 minutos
13	Optimización de funciones	Realización de los problemas 14 y 15 en la pizarra	35 minutos
		Realización del problema 16 individualmente y corrección en la pizarra	15 minutos
		Entrega de un resumen con las características que hay que estudiar para representar una función polinómica o racional	

14	Representación de funciones polinómicas	Realización del ejercicio 27 y 28 a) en la pizarra	50 minutos
		Deberes: Ejercicio 28 c)	
15	Representación de funciones racionales	Corrección del ejercicio 28 c)	10 minutos
		Realización de los ejercicios 28 b) y 29 en la pizarra	40 minutos
		Deberes: Ejercicio 28 d)	
16	Repaso de la unidad	Corrección del ejercicio 28 d)	20 minutos
		Resolución de las dudas de los alumnos en relación a la unidad	30 minutos
17	Prueba escrita	Prueba escrita	50 minutos
18	Corrección del examen	Entrega de los exámenes y corrección entre toda la clase de los ejercicios del examen en la pizarra	50 minutos

I. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

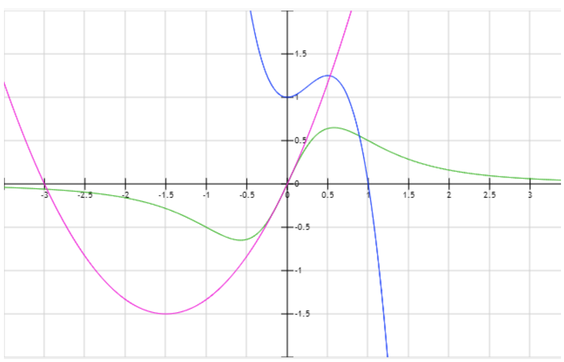
A continuación, se presenta el enunciado de la prueba escrita que se ha diseñado para evaluar el aprendizaje de los alumnos en la unidad didáctica de las derivadas, así como la puntuación de cada ejercicio.

Ejercicio 1.- Asocia a cada expresión analítica que aparece a continuación la gráfica de su función derivada. Justifica tu respuesta. **(1,5 puntos)**

a) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

b) $y = -x^4 + x^3 + x$

c) $y = \frac{x^3}{3} + x^2$



Ejercicio 2.- Encuentra los valores de a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 10 & \text{si} \quad x < 3 \\ -ax^2 + bx - 19 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Halla y simplifica las derivadas de las siguientes funciones. **(2 puntos)**

a) $f(x) = (x^2 + 2)^{3x^2}$

b) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5$

c) $f(x) = -sen\left(\frac{x+1}{x^2+2x+1}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

Ejercicio 4.- Representa la función $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-4}$ a partir del estudio de sus características. **(3,5 puntos)**

a) Puntos de corte con los ejes. **(0,25 puntos)**

b) Asíntotas, justificando la posición que ocupa la función respecto de las mismas. **(1 punto)**

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

d) Puntos máximos y mínimos. **(0,5 puntos)**

e) Representa la función. **(0,75 puntos)**

Ejercicio 5.- De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo. **(1,5 puntos)**

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemáticos pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Haciendo referencia a los códigos mostrados en el apartado A.2, los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se evalúan en cada uno de los ejercicios de la prueba vienen indicados a continuación.

➢ <u>**EJERCICIO 1:**</u>

- **Campos de problemas**: CP4
- **Técnicas:** T4, T7 y T8
- **Tecnologías:** TEC3, TEC4 y TEC6

- **EJERCICIO 2:**

  - Campos de problemas: CP3.2

  - Técnicas: T4

  - Tecnologías: TEC3, TEC4 y TEC5

- **EJERCICIO 3:**

  - Campos de problemas: CP3.1

  - Técnicas: T4

  - Tecnologías: TEC3 y TEC4

- **EJERCICIO 4:**

  - Campos de problemas: CP6.2

  - Técnicas: T4, T6, T7, T8 y T9

  - Tecnologías: TEC3, TEC4, TEC6, TEC7, TEC8 y TEC9

- **EJERCICIO 5:**

  - Campos de problemas: CP5

  - Técnicas: T4, T6, T7, T8, T9 y T10

  - Tecnologías: TEC3, TEC4, TEC6, TEC7 y TEC8

Por otro lado, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje asociados a los mismos de la Orden ECD/494/2016, del 26 de mayo, que se evalúan en esta prueba son los siguientes:

BLOQUE 1:

- **Crit.MA.1.2.** Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
  - **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).
  - **Est.MA.1.2.4.** Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.
  - **Est.MA.1.2.5.** Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.

BLOQUE 3:

- **Crit.MA.3.3.** Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.
    - **Est.MA.3.3.1.** Calcula la derivada de una función, usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
    - **Est.MA.3.3.2.** Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.
    - **Est.MA.3.3.3.** Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
- **Crit.MA. 3.4.** Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.
    - **Est.MA.3.4.1.** Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.

En particular, los estándares de aprendizaje que se evalúan en cada uno de los ejercicios de la prueba vienen especificados en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>EJERCICIO</th><th colspan="2">ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Est.MA.3.3.1.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Est.MA.3.3.3.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Est.MA.3.3.2.</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">Est.MA.3.4.1.</td></tr>
<tr><td></td><td>Est.MA.1.2.1.</td><td>Est.MA.1.2.4.</td></tr>
</table>

5	Est.MA.1.2.5.	Est.MA.3.3.1.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

En este apartado se van a presentar diferentes estrategias que pueden seguir los alumnos a la hora de resolver cada uno de los ejercicios de la prueba, así como posibles errores que pueden cometer en el proceso de resolución.

- **EJERCICIO 1:**

A la hora de resolver el primer ejercicio el alumno podría utilizar tres estrategias diferentes.

- **Estrategia 1**:

1º) Calcular la primera derivada de la función.

2º) Igualar la derivada a 0, $f'(x) = 0$, para obtener los puntos críticos de la función.

3º) Estudiar el signo de la primera derivada en puntos próximos y a ambos lados de los puntos críticos.

4º) Relacionar cada función con la gráfica de su función derivada.

Los posibles errores que pueden cometer los alumnos a la hora de llevar a cabo dicha estrategia son:

- Aplicar mal las reglas de derivación a la hora de hallar las derivadas de las funciones.
- Simplificar mal las funciones derivadas.
- Fallos algebraicos a la hora de calcular las derivadas o los puntos críticos o simplificar las derivadas.
- A la hora de estudiar el signo de la derivada evaluar la función en lugar de la función derivada en puntos próximos a los puntos críticos.
- Considerar que los máximos y mínimos relativos de la función son los mismos que los de su función derivada.

- Considerar que la función y su función derivada son crecientes y decrecientes en los mismos intervalos.
- Relacionar de forma errónea la expresión analítica con la gráfica de su derivada.
- No justificar las respuestas.
- Ejercicio en blanco.

- **Estrategia 2:**

1º) Calcular la primera derivada de la función.

2º) Elegir tres puntos de forma que cada uno de ellos pertenezca únicamente a una de las gráficas representadas.

3º) Evaluar en los puntos elegidos cada una de las derivadas calculadas y ver cuál de ellos cumple la ecuación.

4º) Relacionar cada una de las funciones con la gráfica de su función derivada.

Los posibles errores que pueden cometer los alumnos a la hora de llevar a cabo dicha estrategia son:

- Aplicar mal las reglas de derivación a la hora de hallar las derivadas de las funciones.
- Simplificar mal las funciones derivadas.
- Fallos algebraicos a la hora de calcular las derivadas o los puntos críticos o simplificar las derivadas.
- Fallos aritméticos a la hora de evaluar los puntos en las derivadas.
- Relacionar de forma errónea la expresión analítica con la gráfica de su derivada.
- No justificar las respuestas.
- Ejercicio en blanco.

- **Estrategia 3:**

Relacionar cada una de las funciones con la gráfica de su función derivada teniendo en cuenta la forma de la gráfica de la función derivada. Una de las gráficas es una parábola luego la función asociada a esta gráfica es la función polinómica de grado 3 y otra de las gráficas es la representación de una función cúbica luego la función asociada a esta gráfica es una función polinómica de grado 4. Y, por último, la función racional tiene asíntotas horizontales con lo cual la gráfica asociada a ella es una función que en $+\infty$ y $-\infty$ se aproxima a 0.

Los únicos errores que pueden cometer los alumnos a la hora de llevar a cabo esta estrategia es que no relacionen bien la expresión analítica con la gráfica de su función derivada, no justifiquen la respuesta o el ejercicio este en blanco.

- **EJERCICIO 2:**

A la hora de resolver el segundo ejercicio los alumnos solo pueden seguir la siguiente estrategia:

1º) Estudiar la continuidad de la función. Decir que las dos funciones que definen la función $f(x)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ porque son funciones polinómicas y estudiar la continuidad en $x = 3$. Para ello, se calculan los límites laterales de la función en $x = 3$ y se igualan, ya que es la condición que debe cumplirse para que la función sea continua en ese punto. De esta forma se obtiene una ecuación con dos incógnitas.

2º) Estudiar la derivabilidad de la función. Decir que las dos funciones que definen la función $f(x)$ son derivables en todo $\mathbb{R}$ porque son funciones polinómicas y estudiar la derivabilidad en $x = 3$. Para ello, se calculan las derivadas de las funciones que definen la función $f(x)$, se hacen los límites laterales de $f(x)$ en $x = 3$ y se igualan para que se cumpla la condición de función derivable en un punto. De esta forma, se obtiene otra ecuación con dos incógnitas.

3º) Se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtienen los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Los posibles errores que pueden cometer los alumnos a la hora de resolver este ejercicio son los siguientes:

- Estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 3$ pero no en todo $\mathbb{R}$.
- No razonar la continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
- Errores de notación, dejarse de poner límite cuando calculan el límite.
- Fallos aritméticos al evaluar la función o la derivada.
- Fallos algebraicos a la hora de calcular los límites laterales y resolver el sistema de ecuaciones para hallar los valores de a y b.

- Ejercicio en blanco.

- **<u>EJERCICIO 3:</u>**

Al igual que en el ejercicio anterior, en el tercer ejercicio los alumnos solo disponen de una estrategia posible para su resolución:

1º) Aplicar la definición de derivada o las reglas de derivación para hallar las derivadas de las funciones dadas.

2º) Simplificar las derivadas obtenidas.

Los posibles <u>errores</u> que pueden cometer los alumnos a la hora de resolver este ejercicio son los siguientes:

- Para calcular la derivada de la función del apartado a) utilizar la regla para derivar una función potencia en lugar del método de derivación logarítmica.
- Aplicar mal las propiedades del logaritmo.
- No aplicar bien las reglas de derivación, entre ellas la regla de la cadena.
- No simplificar la función derivada obtenida.
- Fallos algebraicos al hallar las derivadas de las funciones o simplificarlas.
- Errores de notación, dejarse de poner paréntesis.
- Ejercicio en blanco.

- **<u>EJERCICIO 4:</u>**

A la hora de resolver el cuarto ejercicio el alumno podría utilizar la siguiente estrategia:

1º) Resolver la ecuación $f(x) = 0$ para obtener los puntos de corte con el eje X.

2º) Calcular $f(0)$ para obtener el punto de corte con el eje Y.

3º) Hallar los valores de x donde el denominador de la función racional se anula para obtener las asíntotas verticales.

4º) Calcular $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ para justificar la posición de la función respecto a la asíntota vertical $x = 4$.

5º) Calcular $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Como el límite es $+\infty$ la función no tiene asíntota horizontal.

6º) Calcular $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$ para obtener la asíntota oblicua $y = mx + n$.

7º) Hallar $\lim_{x \to \infty} (f(x) - y)$ y $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y)$ para justificar la posición de la función respecto a la asíntota oblicua.

8º) Calcular la primera derivada de la función.

9º) Resolver la ecuación, $f'(x) = 0$, para obtener los puntos críticos de la función.

10º) Estudiar el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha de la asíntota vertical para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

11º) Decir que como la función es creciente en todo $\mathbb{R}$ no presenta ni máximos ni mínimos relativos.

12º) Representar la función a partir de sus características estudiadas en los apartados anteriores.

Los posibles <u>errores</u> que pueden cometer los alumnos a la hora de resolver este ejercicio son los siguientes:

- Errores aritméticos a la hora de calcular el punto de corte con el eje Y o estudiar el signo de la primera derivada.
- Errores algebraicos a la hora de hallar los puntos de corte con el eje X o calcular los límites para obtener las asíntotas de la función.
- Utilizar mal la fórmula para calcular la asíntota oblicua.
- No justificar la posición que ocupa la función respecto a las asíntotas.
- No tener en cuenta la asíntota vertical en el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- No aplicar bien las reglas de derivación para calcular la primera derivada de la función.
- Evaluar la función en lugar de la función derivada para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Decir que el punto donde la función tiene una asíntota vertical es un máximo o mínimo relativo.

- Colocar mal los puntos en el sistema de ejes de coordenadas.
- Dibujar mal la asíntota oblicua porque se cometen errores aritméticos en la tabla de valores que se utiliza para representarla.
- Representar mal la función.
- Ejercicio en blanco.

➢ **EJERCICIO 5:**

A la hora de resolver el quinto ejercicio el alumno podría utilizar dos estrategias diferentes:

- **Estrategia 1:**

1º) Se plantea la función que hay que maximizar, es decir, el volumen del prisma.

2º) Se plantea la ecuación que relaciona el lado de la base cuadrada del prisma con la altura del prisma, es decir, el perímetro de una cara lateral del prisma.

3º) Se despeja una variable de la ecuación y se sustituye en la función a maximizar de modo que ésta quede en función de una sola variable.

4º) Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los puntos críticos.

5º) Se estudia el signo de la primera derivada a ambos lados de los puntos críticos para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y estudiar si cada uno de los puntos críticos es un máximo o un mínimo relativo.

6º) Se da la solución al problema.

- **Estrategia 2:**

Mismos pasos que en la estrategia 1 salvo el 5º paso. En esta estrategia este paso consiste en calcular la segunda derivada de la función y estudiar el signo de la segunda derivada en los puntos críticos obtenidos para ver si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

Los posibles errores comunes a ambas estrategias que pueden cometer los alumnos a la hora de resolver este ejercicio son los siguientes:

- Plantear mal el problema.
- No conocer la fórmula del volumen de un prisma de base cuadrada.

- No conocer la fórmula del perímetro de la cara lateral de un prisma de base cuadrada.
- No aplicar bien las reglas de derivación para calcular la primera derivada de la función.
- Errores algebraicos a la hora de calcular la primera derivada o hallar los puntos críticos de la función.
- No comprobar que tipo de extremo relativo son los puntos críticos obtenidos.
- No explicar los pasos que utiliza en la resolución del problema.
- No dar la solución que pide el problema.
- Ejercicio en blanco.

Además de los errores anteriores, los posibles errores que pueden cometer los alumnos a la hora de resolver este ejercicio al utilizar la primera estrategia son los siguientes:

- Evaluar la función en lugar de la función derivada a la hora de estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Errores aritméticos a la hora de estudiar el signo de la primera derivada.

Asimismo, además de los errores comunes a ambas estrategias, los posibles errores que pueden cometer los alumnos a la hora de resolver este ejercicio al utilizar la segunda estrategia son los siguientes:

- Aplicar mal las reglas de derivación a la hora de calcular la segunda derivada.
- Errores aritméticos a la hora de evaluar la segunda derivada en los puntos críticos.
- Fallos a la hora de relacionar el signo de la segunda derivada con el tipo de extremo relativo que es el punto crítico.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Los criterios de calificación de la prueba escrita se basan en un modelo de penalización de errores llamado modelo de tercios (Gairín, Muñoz & Oller, 2012; Mengual, Gorgorió & Albarracín, 2013).

Este modelo consiste en lo siguiente: el conjunto de todos los errores cometidos por un alumno en las tareas clasificadas como tareas auxiliares generales se puede penalizar con hasta un tercio de la puntuación total del ejercicio y el proceso de calificando del ejercicio debe continuar; el conjunto de todos los errores cometidos por un alumno en las tareas clasificadas como tareas auxiliares específicas, las cuales también engloban las tareas auxiliares generales, se puede penalizar con hasta dos tercios de la puntuación total del ejercicio y al igual que en el caso anterior el proceso de calificación debe continuar, y por último, el conjunto de todos los errores cometidos en las tareas clasificadas como tareas principales se puede penalizar hasta con el total de la puntuación del ejercicio y además se puede finalizar el proceso de calificación del mismo.

Para ello, antes de presentar el modelo de tercios para cada estrategia de resolución de los ejercicios del examen, se van a mostrar las diferentes tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales de dichas estrategias:

- **EJERCICIO 1:**
  - **Estrategia 1:**

TAREAS	**Principales**	- Relacionar cada expresión analítica con la gráfica de su función derivada y justificar la respuesta
	Específicas	- Calcular la primera derivada - Obtener los puntos críticos de la función - Estudiar el signo de la primera derivada
	Generales	- Notación matemática y explicaciones - Simplificar las funciones derivadas - Cálculos algebraicos para hallar la primera derivada o los puntos críticos - Cálculos aritméticos al sustituir valores en la primera derivada para estudiar su signo

Modelo de tercios:

- No relacionan o relacionan mal la función con la gráfica de su función derivada: hasta -0,5 por cada función.
- Relacionan bien la función con la gráfica de su función derivada, pero no lo justifican o lo hacen mal: -0,25 por cada función.

- Calculan mal la primera derivada de la función: hasta -0,33 por cada función.
- Calculan bien la primera derivada, pero no la simplifican: hasta -0,16 por cada función.
- No calculan los puntos críticos de la función o los calculan mal: hasta -0,33 por cada función.
- No estudian el signo de la primera derivada o lo estudian mal: hasta -0,33 por cada función.
- Errores algebraicos al hallar la primera derivada o los puntos críticos: hasta -0,16 por cada función.
- Errores aritméticos al sustituir valores en la primera derivada para estudiar su signo: hasta -0,16 por cada función.
- Por mala notación matemática y por no realizar explicaciones: hasta -0,16 por cada función.

○ **Estrategia 2:**

TAREAS	**Principales**	- Relacionar cada expresión analítica con la gráfica de su función derivada y justificar la respuesta
	Específicas	- Calcular la primera derivada - Obtener coordenadas de puntos a partir de las gráficas - Evaluar cada derivada en los puntos obtenidos
	Generales	- Notación matemática y explicaciones - Simplificar las funciones derivadas - Cálculos algebraicos para hallar la primera derivada o simplificarla - Cálculos aritméticos al sustituir valores en la primera derivada

Modelo de tercios:

- No relacionan o relacionan mal la función con la gráfica de su función derivada: hasta -0,5 por cada función.
- Relacionan bien la función con la gráfica de su función derivada, pero no lo justifican o lo hacen mal: -0,25 por cada función.

- Calculan mal la primera derivada de la función: hasta -0,33 por cada función.
- Calculan bien la primera derivada, pero no la simplifican: hasta -0,16 por cada función.
- Obtención errónea de las coordenadas de los puntos a partir de la gráfica: hasta -0,33 por cada punto.
- No evaluar o evaluar mal la primera derivada en los puntos obtenidos: hasta -0,33 por cada punto.
- Errores algebraicos al hallar la primera derivada o simplificarla: hasta -0,16 por cada función.
- Errores aritméticos al sustituir valores en la primera derivada: hasta -0,16 por cada función.
- Por mala notación matemática y por no realizar explicaciones: hasta -0,16 por cada función.

○ **Estrategia 3:**

TAREAS	**Principales**	- Relacionar cada expresión analítica con la gráfica de su función derivada y justificar la respuesta

Modelo de tercios:

- No relacionan o relacionan mal la función con la gráfica de su función derivada: hasta -0,5 por cada función.
- Relacionan bien la función con la gráfica de su función derivada pero no lo justifican o lo hacen mal: -0,25 por cada función.

➢ **EJERCICIO 2:**

TAREAS	**Principales**	- Hallar los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $\mathbb{R}$

	Específicas	- Explicar la continuidad y derivabilidad de las funciones que definen la función $f(x)$ - Explicar las condiciones que debe cumplir una función para que sea continua y derivable en un punto - Estudiar los límites laterales de $f(x)$ en $x = 3$ - Calcular las derivadas de las funciones que definen la función $f(x)$ - Estudiar los límites laterales de $f'(x)$ en $x = 3$
	Generales	- Notación matemática - Cálculos algebraicos al hallar las derivadas y resolver el sistema de ecuaciones - Cálculos aritméticos al sustituir valores en las funciones o en los límites laterales

Modelo de tercios:

- No dan los valores de a y b para los que la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$ o los dan mal: hasta -1,5.
- No explican porque las dos funciones que definen la función $f(x)$ son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$: hasta -1.
- No explican las condiciones que debe cumplir una función para que sea continua y derivable en un punto: hasta -1.
- No estudian o estudian mal los límites laterales en $x = 3$: hasta -1.
- No calculan o calculan mal las derivadas de las funciones que definen la función $f(x)$: hasta -1 punto.
- Fallos en la notación matemática: hasta -0,5.
- Errores en cálculos algebraicos al hallar las derivadas y simplificarlas o resolver el sistema de ecuaciones: hasta -0,5.
- Errores en cálculos aritméticos al sustituir valores en las funciones o en los límites laterales: hasta -0,5.

➢ EJERCICIO 3:

TAREAS	**Principales**	- Calcular las derivadas de las funciones - Simplificar las derivadas
	Específicas	- Aplicar las reglas de derivación o la definición de función de derivada
	Generales	- Notación matemática y explicaciones - Cálculos algebraicos al hallar las derivadas o simplificarlas

Modelo de tercios:

- No calculan o calculan mal la función derivada: hasta -0,5 por cada función.
- Calculan bien la derivada, pero no la simplifican: hasta -0,25 por cada función.
- Aplican mal las reglas de derivación o la definición de función derivada: hasta -0,33 por cada función.
- Errores en la notación matemática o falta de explicaciones: hasta -0,16 por cada función.
- Errores en cálculos algebraicos al hallar las derivadas o simplificarlas: hasta -0,16 por cada función.

➢ EJERCICIO 4:

TAREAS	**Principales**	- Hallar los puntos de corte de la función con los ejes - Hallar las asíntotas (verticales, horizontales, oblicuas) de la función y justificar la posición que ocupa la función respecto de las mismas - Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función - Hallar los máximos y mínimos relativos de la función - Representación gráfica de la función racional

	Específicas	- Resolver la ecuación $f(x) = 0$ y calcular $f(0)$ - Calcular el límite de una función en un punto o en el infinito - Calcular la primera derivada - Obtener los puntos críticos de la función - Estudiar el signo de la primera derivada
	Generales	- Notación matemática y explicaciones - Cálculos algebraicos al hallar los puntos de corte con el eje X, los valores de x donde se anula el denominador, los límites, la primera derivada o los puntos críticos - Cálculos aritméticos al sustituir valores en las funciones

<u>Modelo de tercios:</u>

- No hallan los puntos de corte con los ejes o los hallan mal: hasta -0,25.
- No calculan las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas o las calculan mal: hasta -1.
- Calculan bien las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, pero no justifican la posición que ocupa la función respecto a las mismas: hasta -0,5.
- No dan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función o los dan mal: hasta -1.
- No hallan los extremos relativos de la función o los hallan mal: hasta -0,5.
- No representan gráficamente la función racional o la representan mal: hasta -0,75.
- No resuelven la ecuación $f(x) = 0$ o la resuelven mal: hasta -0,1.
- No calculan $f(0)$ o la calculan mal: hasta -0,1.
- No calculan el límite de una función en un punto o en el infinito o lo calculan mal: hasta -0,66.
- No hallan la primera derivada o la hallan mal: hasta -0,66.
- No calculan los puntos críticos o los calculan mal: hasta -0,66.
- No estudian el signo de la primera derivada a ambos lados de la asíntota oblicua o lo estudian mal: hasta -0,66.

- Errores de notación o falta de explicaciones: hasta -0,5.
- Errores en los cálculos algebraicos: hasta -0,75.
- Errores en los cálculos aritméticos: hasta -0,75.

➢ **<u>EJERCICIO 5:</u>**

○ **<u>Estrategia 1:</u>**

TAREAS	**Principales**	- Determinar las dimensiones del prisma recto de base cuadrada que tiene volumen máximo
	Específicas	- Plantear la función a maximizar y la ecuación que relaciona las variables que intervienen en dicha función - Calcular la primera derivada - Obtener los puntos críticos de la función - Estudiar el signo de la primera derivada
	Generales	- Conocer la fórmula del área lateral y del volumen de un prisma recto de base cuadrada - Cálculos algebraicos a la hora de obtener la función a maximizar en función de una incógnita, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hallar la primera derivada y simplificarla u obtener los puntos críticos - Cálculos aritméticos a la hora de evaluar la primera derivada

<u>Modelo de tercios:</u>

- No determinan o determinan mal las dimensiones del prisma recto de base cuadrada que tiene volumen máximo: hasta -1,5.
- No plantean o plantean mal la función a maximizar y/o la ecuación que relaciona las variables de esta función: hasta -1.
- No calculan o calculan mal la primera derivada: hasta -1.
- No calculan los puntos críticos o los calculan mal: hasta -1.
- No estudian el signo de la primera derivada o lo estudian mal: hasta -1.

- No conocen la fórmula del área lateral y/o el volumen de un prisma recto de base cuadrada: hasta -0,5.
- Errores aritméticos a la hora de evaluar la primera derivada: hasta -0,5.
- Errores algebraicos a la hora de obtener la función a maximizar en función de una incógnita, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hallar la primera derivada y simplificarla u obtener los puntos críticos: hasta -0,5.

○ **Estrategia 2:**

TAREAS	**Principales**	- Determinar las dimensiones del prisma recto de base cuadrada que tiene volumen máximo
	Específicas	- Plantear la función a maximizar y la ecuación que relaciona las variables que intervienen en dicha función - Calcular la primera derivada - Obtener los puntos críticos de la función - Calcular la segunda derivada
	Generales	- Conocer la fórmula del área lateral y el volumen de un prisma recto de base cuadrada - Cálculos algebraicos a la hora de obtener la función a maximizar en función de una incógnita, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hallar la primera derivada y simplificarla u obtener los puntos críticos - Cálculos aritméticos a la hora de evaluar la segunda derivada

Modelo de tercios:

- No determinan o determinan mal las dimensiones del prisma recto de base cuadrada que tiene volumen máximo: hasta -1,5.
- No plantean o plantean mal la función a maximizar y/o la ecuación que relaciona las variables de esta función: hasta -1.
- No calculan o calculan mal la primera o segunda derivada: hasta -1.

- No calculan los puntos críticos o los calculan mal: hasta -1.
- No estudian el signo de la segunda derivada en los puntos críticos obtenidos para comprobar si se trata de un máximo o mínimo relativo o lo estudian mal: hasta -1.
- No conocen la fórmula del área lateral y/o el volumen de un prisma recto de base cuadrada: hasta -0,5.
- Errores aritméticos a la hora de evaluar la segunda derivada: hasta -0,5.
- Errores algebraicos a la hora de obtener la función a maximizar en función de una incógnita, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hallar la primera y segunda derivada y simplificarlas u obtener los puntos críticos: hasta -0,5.

J. Bibliografía

Colera-Jiménez, J., Oliveira-González, Mª. J., Colera-Cañas, R., & Santaella-Fernández, E. (2015). Matemáticas I. Madrid: Anaya.

De la Prida-Almansa, C., Gaztelu-Villoria, A. Mª., González-García, A., Lorenzo-Blanco, J., P., Pérez-Saavedra, C., & Sánchez-Figueroa, D. (2015). Matemáticas I, SERIE RESUELVE. Madrid: Santillana.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., & Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, pp. 261-274. Jaén: SEIEM.

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula abierta*, 47(4), 449-462.

González-García, C., Llorente-Medrano, J., & Ruiz-Jiménez, Mª. J. (2008). Matemáticas 1º Bachillerato. Madrid: Editex.

Hohenwarter, M. et al. (2019). GeoGebra. Obtenido de https://www.geogebra.org/

Marea Verde. (2019a). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 4ºB de ESO. Textos Marea Verde.

Marea Verde. (2019b). MATEMÁTICAS I – 1º de Bachillerato. Textos Marea Verde.

Mengual, E., Gorgorió, N. & Albarracín, L. (2013). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Berciano, G. Gutierrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, pp. 367-381. Bilbao: SEIEM.

Mondoñedo, L. H. Acerca del origen del cálculo diferencial.

Muñoz Lecanda, M. C., & Román Roy, N. (1999). Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal. *Barcelona, España: Universidad Politécnica de Cataluña*.

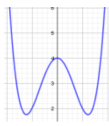
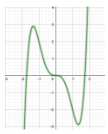
Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, 2 de junio de 2016, núm. 105, pp. 12640 a 13458.

Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, 3 de junio de 2016, núm.106, pp. 13462 a 14390.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 13(1).

Anexos

Anexo 1: Representación de funciones polinómicas y racionales

<table>
<tr><th colspan="3">REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES</th></tr>
<tr><td></td><td>POLINÓMICAS
$\boldsymbol{f(x) = P(x)}$</td><td>RACIONALES
$\boldsymbol{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$</td></tr>
<tr><td>Dominio</td><td>Definidas y continuas en todo $\mathbb{R}$ $\Rightarrow\ Dom\ f = \mathbb{R}$</td><td>Definidas y continuas en todo $\mathbb{R}$ salvo en los valores de x en los que se anula el denominador $\Rightarrow Dom\ f = \mathbb{R} - \{x_1, x_2\}$</td></tr>
<tr><td>Puntos de corte con los ejes</td><td colspan="2">Corte con el eje X: $f(x) = 0$
Corte con el eje Y: $x = 0$</td></tr>
<tr><td>Simetría</td><td colspan="2">Función par: $f(-x) = f(x)$, simetría respecto al eje Y. 
 Función impar: $f(-x) = -f(x)$, simetría respecto al origen.</td></tr>
<tr><td>Ramas infinitas y asíntotas</td><td>Ramas infinitas:
$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$</td><td>Asíntotas verticales: Raíces del denominador (soluciones de la ecuación $Q(x) = 0$).
Asíntotas horizontales cuando $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, con $b \in \mathbb{R}$ entonces $y = b$ es la asíntota horizontal.
Asíntotas oblicuas cuando $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ Entonces, $y = mx + n$ es la asíntota oblicua donde $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$</td></tr>
</table>

		Si hay asíntotas horizontales no puede haber oblicuas. Si una función no tiene asíntotas hallamos las ramas infinitas.
Puntos críticos	Sus abscisas son las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$. Conocidas las abscisas, se hallan las ordenadas sobre la función $f(x)$.	
Monotonía	Estudiamos el signo de $f'(x)$. Para ello trazamos una recta y colocamos sobre ella los puntos críticos y los puntos en los que la función no es continua. A continuación, evaluamos la derivada en puntos que se encuentren a la derecha y a la izquierda de dichos puntos. Si $f'(x) > 0$, entonces la función $f(x)$ es creciente. Si $f'(x) < 0$, entonces la función $f(x)$ es decreciente. Si la función $f(x)$ es creciente a la izquierda del punto crítico a y decreciente a la derecha de a, entonces a es un máximo relativo. Si la función es decreciente a la izquierda del punto crítico a y creciente a la derecha de a, entonces a es un mínimo relativo.	
Representación	Se dibuja la gráfica de la función a partir de los datos obtenidos.	